



Contributions aux bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne en traitement du signal

Alexandre Renaux

► To cite this version:

Alexandre Renaux. Contributions aux bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne en traitement du signal . Traitement du signal et de l'image. Université Paris-Sud, 2011. <tel-01290682>

HAL Id: tel-01290682

<https://hal-centralesupelec.archives-ouvertes.fr/tel-01290682>

Submitted on 18 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

Université Paris-Sud 11

Spécialité : Physique

Présentée par

Alexandre Renaux

Contributions aux bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne en traitement du signal

Soutenue le 7 décembre 2011 devant le jury composé de :

Mr.	Chevalier Pascal	CNAM Paris	Président
Mr.	Abed-Meraïm Karim	Télécom ParisTech	Rapporteur
Mr.	Besson Olivier	ISAE Toulouse	Rapporteur
Mr.	Ferrari André	Université de Nice	Rapporteur
Mr.	Berthoumieu Yannick	Université de Bordeaux	Examineur
Mr.	Delmas Jean-Pierre	Telecom Sud Paris	Examineur
Mr.	Marcos Sylvie	CNRS L2S	Examineur

Laboratoire des signaux et systèmes
Supelec, 3 rue Joliot Curie, 91, Gif-sur-Yvette, France

*On sait tous que les scientifiques gâchent leur vie.
Homer J. Simpson. Le safari des Simpson. Saison 12. Episode 17.*

*Le temps ne respecte pas ce qui se fait sans lui.
Cantillon.*

Table des matières

Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
1 Curriculum Vitæ	1
1.1 Présentation générale	1
1.2 Parcours académique	1
1.3 Activités professionnelles	2
1.4 Publications	2
1.4.1 Articles réimprimés dans des ouvrages	3
1.4.2 Revues internationales avec comité de lecture	3
1.4.3 Conférences internationales avec comité de lecture et actes	4
1.4.4 Conférences nationales (GRETSI) avec comité de lecture et actes	6
1.4.5 Polycopiés pour l'enseignement	6
1.4.6 Séminaires	6
1.5 Participation à des contrats	7
1.6 Activités d'encadrements	8
1.6.1 Encadrements de doctorants	8
1.6.2 Participations non officielles à des encadrements de doctorants	9
1.6.3 Encadrements de stage de M2-R	9
1.6.4 Encadrements de stage de Magistère ENS	9
1.6.5 Encadrements de stage de TER M2 et M1	10
1.7 Séjours à l'étranger	10
1.7.1 Dans le cadre de mes activités de recherches	10
1.7.2 Dans le cadre de mes activités d'enseignements	10
1.8 Organisation de conférences	10
1.9 Participation à des jury de thèses et M2R	10
1.10 Evaluations d'articles et de projets de recherches	11
1.11 Activités d'enseignements	12
1.12 Divers	15
2 Synthèse des activités de recherche	17
2.1 Contexte et premiers résultats	17
2.2 Aspects théoriques	23
2.2.1 Bornes déterministes	23
2.2.2 Bornes bayésiennes	23
2.2.3 Bornes hybrides	25
2.3 Aspects applicatifs	27

2.3.1	Borne de Cramér-Rao	27
2.3.1.1	Applications directes	27
2.3.1.1.1	Localisation de source en champ proche	27
2.3.1.1.2	Processus non-gaussien	31
2.3.1.2	Applications indirectes	32
2.3.1.2.1	Convergence de l'algorithme EM	32
2.3.1.2.2	Seuils de résolution limites	32
2.3.1.2.3	Géométrie d'antenne	50
2.3.2	Bornes globales déterministes	57
2.3.2.1	Localisation de source en champ proche	57
2.3.2.2	Estimation de points de ruptures multiples	62
2.3.3	Borne de Weiss-Weinstein	63
2.3.3.1	Localisation de sources et géométrie d'antenne	63
2.3.3.2	Estimation de la phase des signaux de pulsar	68
3	Conclusions et perspectives	69
	Bibliographie	75

Table des figures

2.1	Principe de l'estimation paramétrique.	18
2.2	Comportement de l'EQM d'un estimateur du maximum de vraisemblance.	19
2.3	Performances asymptotiques des méthodes du Maximum de Vraisemblance en traitement d'antenne	21
2.4	Illustration du cas <i>sources résolues</i> et <i>sources non résolues</i> à l'aide d'un pseudo-spectre d'algorithme d'estimation.	34
2.5	Le SRL en fonction de σ^2 pour $T = 100$ observations : Le SRL basé sur l'équation (2.56) et (2.57) est sensiblement égal à la solution numérique exacte basée sur (2.52). Ceci valide nos expressions du SRL. De plus, on note que, par exemple, pour $P_d = 0.37$ et $P_{fa} = 0.1$, le SRL basé sur le critère de Smith est sensiblement égal au SRL calculé en utilisant le test d'hypothèse (voir Annexe B.1). Les courbes correspondant à $(P_d, P_{fa}) = (0.49, 0.3)$ et $(P_d, P_{fa}) = (0.32, 0.1)$, nous montrent l'influence du facteur de translation sur le SRL.	37
2.6	$D(r_L, \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2)$ en fonction des paramètres de polarisation ρ et ψ ; $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $r_T = \frac{1+i}{20}$ avec $N = 20$. (à gauche) $\rho_2 = 85$ deg et (à droite) $\rho_2 = 5$ deg.	37
2.7	Deux SDI proches noyées dans les interférences formées par 3 sources de nuisance.	39
2.8	RSBI en fonction du SRL pour des sources en champ lointain en présence d'interférences.	41
2.9	(à gauche) Le RSBI requis pour résoudre deux SDI connues/inconnues pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et $M = 4$ avec $\Delta_\omega = 0.75$. (à droite) Le RSBI requis pour résoudre deux SDI inconnues pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et pour différentes valeurs de M et de Δ_ω	41
2.10	Le RSBI requis pour résoudre deux sources du type BPSK inconnues orthogonales/non-orthogonales pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et $M = 4$	42
2.11	Le RSBI requis pour résoudre deux sources connues à l'aide d'une antenne parfaite $A_{4,6}$, une antenne quelconque $A'_{4,6}$ et une antenne à minimum de redondance $A_{4,5}$ décrites au tableau 2.2.	42
2.12	Le facteur de translation κ en fonction de la probabilité de fausse alarme P_{fa} et la probabilité de détection P_d . On peut remarquer qu'augmenter P_d ou diminuer P_{fa} a pour effet d'augmenter la valeur du facteur de translation κ (ce qui est normal, puisque ceci correspond à un test d'hypothèses plus sélectif [Sch91, Kay98].	46
2.13	SRLM en fonction de σ^2 pour $T = 100$	47
2.14	Le RSB requis pour résoudre deux sources situées en champ proche en fonction de δ_ρ pour $\delta_\kappa = 0.003$ dans le cas de signaux sources orthogonaux et signaux sources non orthogonaux. On remarque le même comportement du RSB en fonction de δ_κ pour δ_ρ fixe.	48

2.15	$\delta_{\mathcal{R}}$ en fonction du RSB requis pour résoudre deux sources en présence d'une source interférente avec une ALU en émission et réception avec $N_{\mathcal{R}} = N_{\mathcal{T}} = 4$ capteurs, $L = 4$ et $T = 100$ observations. Le cas dit <i>clairvoyant</i> correspond au cas idéal où tous les paramètres sont connus y compris $\delta_{\mathcal{R}}$.	50
2.16	Géométrie du problème	53
2.17	Comparaison de performance des antennes en V avec une antenne circulaire	55
2.18	Fraction $K(M)$ en fonction du nombre de capteurs M	55
2.19	BCR normalisée en fonction de l'angle d'ouverture	56
2.20	Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le modèle déterministe en fonction de ω pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 15$.	62
2.21	Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le modèle déterministe en fonction de ϕ pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 15$.	62
2.22	Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le modèle aléatoire en fonction de ω pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 100$.	62
2.23	Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le modèle aléatoire en fonction de ϕ pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 100$.	62
2.24	MAP par rapport à la BWV.	68

Liste des tableaux

2.1	La relation entre le SRL et le RSBI/RSB requis pour résoudre deux SDI.	40
2.2	Caractéristique des différentes géométries d’antennes avec le même nombre de capteurs et des ouvertures différentes. L’antenne parfaite ne contient pas de redondance et aucun écart n’est manquant. La position des capteurs traduit leur coordonnées sur l’axe des abscisses. L’unité, d , correspond à l’écart minimal entre deux capteurs successifs. L’écart entre deux capteurs est donc un multiple de d qui doit être compris entre d et $(L - 1)d$. Une distance redondante se traduit par la répétition d’un écart [VH86]. Un écart manquant est dû à l’absence d’un écart entre d et $(L - 1)d$ [Mof68]. Une antenne est dite parfaite, si aucun écart n’est manquant et si aucune distance n’est redondante [AGGS96, ASG99, MD01].	42
2.3	Le RSB requis pour résoudre deux cibles.	49

Chapitre 1

Curriculum Vitæ

1.1 Présentation générale

Alexandre Renaux

32 ans, né le 17 décembre 1978 à Nancy (54)

Maître de conférences classe normale (échelon 4)

Université Paris-Sud 11 (département de physique)

Section 61 : Génie informatique, automatique et traitement du signal

Laboratoire des Signaux et Systèmes (Université Paris-Sud 11 / CNRS UMR-8506 / Supelec)

Supelec, 3, rue Joliot Curie 91192 Gif-sur-Yvette cedex

Téléphone : +33 1 69 85 17 58

Adresse électronique : renaux@lss.supelec.fr

Page web : <http://www.lss.supelec.fr/perso/alexandre.renaux/>

1.2 Parcours académique

- *2003-2006 Thèse de doctorat* en Traitement du Signal, École Normale Supérieure de Cachan, laboratoire SATIE (Systèmes et Applications des Technologies de l'Information et de l'Énergie) (ENS Cachan / CNRS UMR-8029). Soutenue le 7 juillet 2006.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES PERFORMANCES D'ESTIMATION EN TRAITEMENT STATISTIQUE DU SIGNAL.

Composition du jury :

- Bernard Fleury, Professeur des Universités, Aalborg University, Danemark (Président)
- Jean-Yves Tournet, Professeur des Universités, Institut National Polytechnique de Toulouse (Rapporteur)
- Luc Vandendorpe, Professeur des Universités, Université Catholique de Louvain, Belgique (Rapporteur)
- Jean-Pierre Delmas, Professeur des Universités, Institut National des Télécommunications Evry (Examineur)
- Eric Boyer, Docteur, École Normale Supérieure de Cachan (Invité)
- Philippe Forster, Professeur des Universités, Université Paris 10 (Co-directeur de thèse)

- Pascal Larzabal, Professeur des Universités, Université Paris-Sud 11/École Normale Supérieure de Cachan (Directeur de thèse)
- 2002-2003 Diplôme d'Etudes Approfondies (**DEA**) en Automatique et Traitement du Signal, Université Paris-Sud 11/Supelec/École Normale Supérieure de Cachan. Mention Bien.
- 2001-2002 **Agrégation** de Génie Électrique. Rang : 7^{ème}.
- 2000-2001 **Maîtrise** EEA, Université Paris-Sud 11/École Normale Supérieure de Cachan. Mention Assez Bien.
- 1999-2000 **Licence** Ingénierie Électrique, Université Paris-Sud 11/École Normale Supérieure de Cachan. Mention Assez Bien.
- 1996-1999 Classe Préparatoire aux Grandes Écoles (**CPGE**). Admission à l'École Normale Supérieure de Cachan.
- 1996 **Baccalauréat** STI. Mention Très Bien.

1.3 Activités professionnelles

- Depuis septembre 2007 **Maître de conférences** classe normale (4^{ème} échelon) à l'Université Paris-Sud 11 (département de physique) / Laboratoire des Signaux et Systèmes (Université Paris-Sud 11 / CNRS UMR-8506 / Supelec).
- 2006-2007 **Post-doctoral research associate** à Washington University in St. Louis, USA / Department of Electrical and Systems Engineering.
- 2003-2006 **Allocataire moniteur** Doctorant au laboratoire SATIE (CNRS / École Normale Supérieure de Cachan) et Moniteur à l'IUT de Cachan.

1.4 Publications

La totalité des articles publiés ainsi que quelques présentations et mes polycopiés de cours sont disponibles sur ma page web : <http://www.lss.supelec.fr/perso/alexandre.renaux/>

Revues :

- 15 articles de revue internationale avec comité de lecture publiés ou acceptés (depuis décembre 2006).
- 5 articles de revue internationale avec comité de lecture soumis.

Conférences :

- 19 articles de conférence internationale avec comité de lecture et actes publiés.
- 9 articles de conférence nationale (GRETSI) avec comité de lecture et actes publiés.

Les articles [CI7] et [CI12] concernent des conférences où j'ai personnellement été invité.

Remarque : les articles issus de mes travaux de thèses sont [J1], [J2], [J3], [J4], [CI1], [CI2], [CI3], [CI4], [CN1], et [CN2]. Les articles issus de mes travaux durant mon année de post-doctorat sont [CI5], [CI6], [CI7], et [CN3]. Les articles issus de mes travaux depuis mon intégration en temps que maître de conférences sont [J5], [J6], [J7], [J8], [J9], [J10], [J11], [J12], [J13], [J14], [J15], [CI8], [CI9], [CI10], [CI11], [CI12], [CI13], [CI14], [CI15], [CI16], [CI17], [CI18], [CI19], [CN4], [CN5], [CN6], [CN7], [CN8] et [CN9] (ainsi que [J16], [J17], [J18], [J19], [J20] soumis).

Les articles ou communications marqués d'une étoile sont donnés en annexe.

1.4.1 Articles réimprimés dans des ouvrages

[J4] et [CI4] ont été sélectionnés pour paraître dans l'ouvrage : *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering and Tracking* écrit par Harry L. Van Trees et Kristine L. Bell parut en 2007. Cet ouvrage édité chez Wiley regroupe 80 articles sur le domaine des bornes minimales ainsi qu'une introduction d'environ 100 pages.

1.4.2 Revues internationales avec comité de lecture

[J1] **A. Renaux**, P. Forster, E. Chaumette et P. Larzabal, "On the high SNR conditional maximum likelihood estimator full statistical characterization", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 54, Issue : 12, Dec. 2006, pp. 4840-4843.

[J2] **A. Renaux**, P. Forster, E. Boyer et P. Larzabal, "Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal to noise ratio", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 55, Issue : 5, Part 2, May 2007, pp. 2358-2364.

[J3] **A. Renaux**, L. Najjar-Atallah, P. Larzabal et P. Forster, "A useful form of the Abel bound and its application to estimator threshold prediction", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 55, Issue : 5, Part 2, May 2007, pp. 2365-2369.

[J4] **A. Renaux**, "Weiss-Weinstein bound for data aided carrier estimation", *IEEE Signal Processing Letters*, Volume : 14, Issue : 4, Apr. 2007, pp. 283-286.

[J5*] C. Herzet, V. Ramon, **A. Renaux**, et L. Vandendorpe, "Characterization of the EM algorithm mean speed of convergence based on Cramér-Rao bounds", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 56, Issue : 6, Jun. 2008, pp. 2218-2228.

[J6*] S. Bay, B. Geller, **A. Renaux**, J-P Barbot et J-M Brossier, "On the Hybrid Cramér-Rao bound and its application to dynamical phase estimation", *IEEE Signal Processing Letters*, Volume : 15, 2008, pp. 453-456.

[J7*] **A. Renaux**, P. Forster, P. Larzabal, C. Richmond, et A. Nehorai, "A fresh look at the Bayesian bounds of the Weiss-Weinstein family", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 56, Issue : 11, Nov. 2008, pp. 5334-5352.

[J8*] F. Pascal et **A. Renaux**, "Statistical analysis of the covariance matrix MLE in K-distributed clutter", *Elsevier Signal Processing*, Volume : 90, Issue : 4, Apr. 2010, pp. 1165-1175.

[J9] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Conditional and unconditional Cramér-Rao bounds for near-field source localization", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 58, Issue : 5, May 2010, pp. 2901-2907.

[J10*] P. S. La Rosa, **A. Renaux**, A. Nehorai et C. H. Muravchik, "Barankin-type lower bound on multiple change-point estimation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 58, Issue : 11, Nov. 2010, pp. 5534-5549.

[J11] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical resolution limit of the uniform linear cocompact orthogonal loop and dipole array", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Volume : 59, Issue : 1, Jan. 2011, pp. 425-431.

[J12*] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Multidimensional statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model : hypothesis test and Cramér-Rao bound approaches", à paraître dans *Eurasip Journal on Advances on Signal Processing special issue on Advances in Angle-of-Arrival and Multidimensional Signal Processing for Localization and Communications*.

[J13*] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "A study of various 3D array geometry using ULA branches : a Cramér-Rao bound approach", à paraître dans *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Springer.

[J14] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical resolution limit for source localization with clutter interference in a MIMO radar context", à paraître dans *IEEE Transactions on Signal Processing*.

[J15] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical analysis of achievable resolution limit in the near field context", à paraître dans *Elsevier Signal Processing*.

Revue internationale avec comité de lecture soumise :

[J16] N. D. Tran, **A. Renaux**, R. Boyer, S. Marcos et P. Larzabal, "Weiss-Weinstein bound for MIMO radar with colocated linear arrays for SNR threshold prediction", soumis à *Elsevier Signal Processing*.

[J17*] N. D. Tran, **A. Renaux**, R. Boyer, S. Marcos et P. Larzabal, "Performance Bounds for the pulse phase estimation of X-ray pulsars", soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

[J18] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "On the statistical resolvability of point sources in subspace interference using a GLRT-based framework", soumis à *Elsevier Signal Processing*.

[J19*] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Some results on the Weiss-Weinstein bound in array processing", soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

[J20] M. N. El Korso, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Deterministic lower bounds on the mean square error for near field source localization", soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

1.4.3 Conférences internationales avec comité de lecture et actes

[CI1] **A. Renaux**, E. Boyer, P. Forster et P. Larzabal, "Non-efficiency and non-Gaussianity of a maximum likelihood estimator at high signal-to-noise ratio and finite number of samples", in Proc. of *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-04*, Montreal, Canada.

[CI2] **A. Renaux**, P. Forster et E. Boyer, "Non asymptotic efficiency of a maximum likelihood estimator at finite number of samples", in Proc. of *European Signal Processing Conference, EUSIPCO-04*, Vienna, Austria.

[CI3] **A. Renaux**, P. Forster, et P. Larzabal, "A new derivation of the Bayesian bounds for parameter estimation", in Proc. of *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, SSP-05*, Bordeaux, France.

[CI4] **A. Renaux**, P. Forster, P. Larzabal, et C. Richmond "The Bayesian Abel bound on the mean square error", in Proc. of *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-06*, Toulouse, France.

[CI5] E. Chaumette, J. Galy, F. Vincent, **A. Renaux**, et P. Larzabal "MSE bounds conditioned by the energy detector", in Proc. of the *European Signal Processing Conference, EUSIPCO-07*, Poznan, Pologne.

[CI6] S. Bay, C. Herzet, JM. Brossier, JP. Barbot, **A. Renaux** et B. Geller, "Derivation of a Bayesian Cramér-Rao bound for dynamical offset estimation", in Proc. of *VIII IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, SPAWC-07*, Helsinki, Finland.

[CI7] P. LaRosa, **A. Renaux**, et A. Nehorai, "Barankin bounds for multiple change points estimation : computational aspects", in proc. of the *Second IEEE International Workshop on*

Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, CAMSAP-07, St. Thomas, U.S. Virgin Islands. (invited paper special session on minimal bounds)

[CI8*] E. Chaumette, **A. Renaux** et P. Larzabal, "Lower bounds on mean square error derived from mixture of linear and non-linear transformations of the unbiasedness definition", in Proc. of *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-09, Taipei, Taiwan.

[CI9] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Non-matrix closed form expressions of the Cramér-Rao bounds for near-field localization parameters", in Proc. of *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-09, Taipei, Taiwan.

[CI10] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical resolution limits for multiple parameters of interest and for multiple signals", in Proc. of *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-10, Dallas, TX, USA.

[CI11] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Performance analysis of 2D and 3D antenna arrays for source localization" in Proc. of the European Signal Processing Conference, EUSIPCO-10, Aalborg, Denmark.

[CI12] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Closed-form expression of the Weiss-Weinstein bound for 3D source localization : the conditional case", in Proc. of *IEEE* Sensor Array Multichannel Workshop SAM-2010, Kibutz Ma'ale Hahamisha, Israel.
(invited paper special session on lower bound in array processing)

[CI13*] E. Chaumette, **A. Renaux** et P. Larzabal, "New trends in deterministic lower bounds and SNR threshold estimation : from derivable bounds to conjectural bounds ", in Proc. of *IEEE* Sensor Array Multichannel Workshop SAM-2010, Kibutz Ma'ale Hahamisha, Israel.
(invited paper special session on lower bound in array processing)

[CI14] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical resolution limit : application to passive polarized sources localization", in Proc. of Séminaire sur les Systèmes de Détection : Architectures et Technologies DAT-2011, Alger, Algérie.

[CI15] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Statistical resolution limit for source localization in a MIMO context", in Proc. of *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-11, Praha, Czech Republic.

[CI16] N. D. Tran, **A. Renaux**, R. Boyer, S. Marcos et P. Larzabal, "MIMO radar in the presence of modeling errors : A Cramér-Rao bound investigation", in Proc. of *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-11, Praha, Czech Republic.

[CI17] D. T. Vu, M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Angular resolution limit for vector sensor arrays : detection and information theory approaches", in Proc. of *IEEE* Workshop on Statistical Signal Processing, SSP-11, Nice, France.
(invited paper special session on polarized signal processing)

[CI18] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Weiss-Weinstein bound and SNR threshold analysis for DOA estimation with a COLD array", in Proc. of *IEEE* Workshop on Statistical Signal Processing, SSP-11, Nice, France.
(invited paper special session on polarized signal processing)

[CI19] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "A GRLT-based framework for the multidimensional statistical resolution limit", in Proc. of *IEEE* Workshop on Statistical Signal Processing, SSP-11, Nice, France.

1.4.4 Conférences nationales (GRETSI) avec comité de lecture et actes

[CN1] P. Forster, E. Boyer, P. Larzabal et **A. Renaux**, "Non-efficacité et non-gaussianité asymptotiques d'un estimateur du maximum de vraisemblance à fort rapport signal sur bruit", Actes du 19ème Colloque GRETSI 2003, Paris, France.

[CN2] **A. Renaux**, P. Forster, et P. Larzabal, "Une nouvelle approche des bornes bayésiennes", Actes du 20ème Colloque GRETSI 2005, Louvain-la-Neuve, Belgium.

[CN3] S. Bay, C. Herzet, JM. Brossier, JP. Barbot, **A. Renaux** et B. Geller, "Bornes bayésiennes pour l'estimation de phase évoluant au cours du temps", Actes du 21ème Colloque GRETSI 2007, Troyes, France.

[CN4] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Analyse des performances de réseaux de capteurs 2D et 3D pour la localisation de source", Actes du 22ème Colloque GRETSI 2009, Dijon, France.

[CN5] M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Expressions non-matriciellles des bornes de Cramér-Rao pour la localisation de source en champ proche", Actes du 22ème Colloque GRETSI 2009, Dijon, France.

[CN6] N. D. Tran, **A. Renaux**, R. Boyer, S. Marcos et P. Larzabal, "Erreurs de modèle pour les radars MIMO : une étude par la borne de Cramér-Rao", Actes du 23ème Colloque GRETSI 2011, Bordeaux, France.

[CN7] M. N. El Korso, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour la localisation de sources en champs proche", Actes du 23ème Colloque GRETSI 2011, Bordeaux, France.

[CN8] D. T. Vu, **A. Renaux**, R. Boyer et S. Marcos, "Borne de Weiss-Weinstein pour la localisation de source polarisé l'aide d'un réseau de capteurs COLD", Actes du 23ème Colloque GRETSI 2011, Bordeaux, France.

[CN9] D. T. Vu, M. N. El Korso, R. Boyer, **A. Renaux** et S. Marcos, "Résolution limite angulaire : approches basées sur la théorie de l'information et sur la théorie de la détection", Actes du 23ème Colloque GRETSI 2011, Bordeaux, France.

1.4.5 Polycopiés pour l'enseignement

[P1] Traitement numérique des signaux, IFIPS 1ère année, (61 pages).

[P2] Statistical signal processing, Vietnam National University, Hanoi (VNU), (106 pages).

1.4.6 Séminaires

[S1] "Minimal bounds on the mean square error", École Normale Supérieure de Cachan, Septembre 2004, Cachan, France.

[S2] "Estimation theory and minimal bounds : application to spectral analysis and passive Radar", ONERA (The French Aerospace Laboratory) Mars 2005, Palaiseau, France.

[S3] "Estimation lower bounds and synchronization issue in single carrier system", Newcom Autumn School on "Estimation Theory for wireless communications" 24-28 Octobre 2005, Paris, France.

[S4] "Estimation lower bounds : links between deterministic and Bayesian bounds", Newcom Workshop at Aalborg University, 18-19 Novembre 2005, Aalborg, Denmark.

[S5] "Minimal bounds on the mean square error : a tutorial", Washington University in St. Louis, Février 2007, St. Louis, MO, USA

[S6] "Bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne : c'est pratique!!!", Séminaire SON-DRA, Février 2010, Supélec, Gif-sur-Yvette, France

[S7] "Multidimensional statistical resolution limit", Washington University in St. Louis, Mars 2010, St. Louis, MO, USA

[S8] "The lower bounds on the mean square error - Application to radar ", National University of Singapore, Septembre 2010, Singapore

1.5 Participation à des contrats

- Projet Digiteo TIMuCa (Traitement de l'Information Multi-Capteurs) 2008-2012. Sur certains thèmes de recherche, qu'elle a labellisés Domaines d'Intérêt Majeur (DIM), la Région Île-de-France a confié l'organisation des appels à propositions et l'attribution des financements à des structures fédératrices. C'est ainsi que la Fondation Digiteo est chargée du DIM logiciels et systèmes complexes. Dans ce contexte, lors de mon arrivé en poste au Laboratoire des Signaux et Systèmes, nous avons répondu à un appel à projet sous la thématique capteurs logiciels conformables, adaptables, fusion de données. Il s'agissait de mettre en place une collaboration entre le Laboratoire des Signaux et Systèmes (S. Marcos, R. Boyer, et A. Renaux) et le laboratoire SATIE de l'École Normale Supérieure de Cachan (P. Larzabal). Ce projet de recherche est basé sur les travaux de recherches que j'ai effectués lors de mon post-doctorat. Ce projet se focalise sur des systèmes qui intègrent un réseau de capteurs pour la connaissance et la surveillance de l'environnement. Déjà utilisé dans les domaines de la téléphonie mobile, de l'internet (réseaux WiFi) et de la localisation (GPS), les systèmes multi-capteurs tendent également à se développer à d'autres domaines tels que l'imagerie médicale, l'aéronautique, et le nucléaire (déploiement d'une constellation de robots en milieu hostile). Nous proposons d'utiliser les degrés de libertés mis à notre disposition, à savoir les classiques diversités temporelles et spatiales (environnement multi-capteurs) mais surtout la diversité des formes d'ondes et la possible mobilité du réseau de capteurs afin d'augmenter les performances des systèmes actuels. Ces deux derniers points font actuellement l'objet de recherches intensives de part le monde du fait de leur potentiel pour l'amélioration des systèmes multi-capteurs du futur.

Le montant reçu s'élève à 220000 euros pour le financement, entre autre, de deux thèses (Dinh Thang VU et Duy Tran NGUYEN) dont je suis co-directeur.

- De manière non-officielle, lors de mon séjour post-doctoral à Washington University in St. Louis (2006-2007), j'ai participé au BAA-07-02-IFKA, "Sensors as Robots", proposé par l'U.S. Air Force (Budget total 4.9M\$) sous la supervision du Professeur Arye Nehorai. <http://www.fbo.gov/spg/USAF/AFMC/AFRLRRS/Reference-Number-BAA-07-02-IFKA/SynopsisP.html>. Le thème de ce projet concerne l'étude d'un système multi-Radars intelligent (polarimétrique, SAR, sonar, MIMO, cognitifs) déployé sur différents supports (air, terre et mer). J'ai participé à la rédaction du "white paper" et du "proposal" du point de vue technique (rédactions de la partie du projet concernant le design de formes d'ondes radar, l'optimisation de géométries d'antennes, les calculs de performances et les stratégies de contre mesures) et administratif (management des collaborateurs—11 personnes—, prévisions de budget, et diagramme de travail prévisionnel des différentes tâches).

1.6 Activités d'encadrements

Les détails scientifiques de ces encadrements seront développés dans le chapitre 2.

1.6.1 Encadrements de doctorants

- **Mohammed Nabil El Korso**, Thèse de l'Université Paris-Sud 11. Bourse ministérielle. Encadrants : S. Marcos (Directrice de thèse - 10%), R. Boyer (Co-directeur de thèse - 50%) et **A. Renaux (encadrant - 40%)**.
Thèse commencée en septembre 2008 et soutenue le 7 Juillet 2011.

**ANALYSE DE PERFORMANCES EN TRAITEMENT D'ANTENNE. BORNES
INFÉRIEURES DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE ET SEUIL DE RÉOLUTION
LIMITE.**

Composition du jury :

- Pascal Larzabal, Professeur des Universités, Université Paris-Sud 11/École Normale Supérieure de Cachan (Président)
- Jean-Marc Brossier, Professeur des Universités, Institut National Polytechnique de Grenoble (Rapporteur)
- Jean-Yves Tournet, Professeur des Universités, Institut National Polytechnique de Toulouse (Rapporteur)
- Karim Abed-Meraim, Professeur assistant, Télécom ParisTech (Examinateur)
- Gérard Favier, Directeur de Recherche CNRS, I3S, Nice (Examinateur)
- Rémy Boyer, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Co-directeur de thèse)
- Sylvie Marcos, Directeur de Recherche CNRS, L2S, Gif-sur-Yvette (Directrice de thèse)
- Alexandre Renaux, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Co-directeur de thèse)

Publications associées : [J09][J11][J12][J14][J15] - [CI9][CI10][CI14][CI15][CI17][CI19][CN5][CN7][CN9] (+ [J18][J20] soumis).

- **Dinh Thang Vu**, Thèse de l'Université Paris-Sud 11. Bourse Digiteo. Encadrants : S. Marcos (Directrice de thèse - 10%), **A. Renaux (Co-directeur de thèse - 60%)** et R. Boyer (encadrant - 30%). Thèse commencée en septembre 2008, soutenance prévue octobre 2011.

**OUTILS STATISTIQUES POUR LE POSITIONNEMENT OPTIMAL DE CAPTEURS
DANS LE CONTEXTE DE LA LOCALISATION DE SOURCES.**

Composition du jury :

- Philippe Forster, Professeur des Universités, Université Paris 10 (Rapporteur)
- Yide Wang, Professeur des Universités, Université de Nantes (Rapporteur)
- Pascal Chevalier, Professeur des Universités, CNAM, Paris (Examinateur)
- Jean-Philippe Ovarlez, Maître de Recherche ONERA, Palaiseau (Examinateur)
- Rémy Boyer, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Co-directeur de thèse)

- Sylvie Marcos, Directeur de Recherche CNRS, L2S, Gif-sur-Yvette (Directrice de thèse)
- Alexandre Renaux, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Co-directeur de thèse)

Publications associées : [J13] - [CI11][CI12][CI17][CI18][CN4][CN8][CN9] (+ [J19] soumis).

- **Nguyen Duy Tran**, Thèse de l'École Normale Supérieure de Cachan. Bourse Digiteo. Encadrants : P. Larzabal (Directeur de thèse - 10%), **A. Renaux (Co-directeur de thèse - 50%)** S. Marcos (encadrant - 10%) et R. Boyer (encadrant - 30%). Thèse commencée en septembre 2009, soutenance prévue en septembre 2012.

TITRE PROVISOIRE : PERFORMANCES D'ESTIMATION POUR LES RADAR MIMO ET LA LOCALISATION DE SOURCES

Publications associées : [CI16][CN6] (+[J16][J17] soumis).

1.6.2 Participations non officielles à des encadrements de doctorants

Durant mon année de post-doctorat (2006/2007), j'ai participé de manière informelle à l'encadrement de deux doctorants.

- Stéphanie Bay (ENS Cachan/laboratoire SATIE, directeurs de thèse : B. Geller et J.-P. Barbot) sur le thème des bornes minimales pour les systèmes dynamiques. Nous avons appliqué ces bornes à un problème de synchronisation en communications numériques non entraîné. Ce travail a donné lieu à la publication d'un article de revue internationale [J6] ainsi que deux articles de conférence [CI6][CN3].
- Patricio LaRosa (Washington University in St. Louis, directeur de thèse : A. Nehorai) sur le thème de la détection de point de rupture avec application à la détection de contractions chez la femme enceinte. Nous avons travaillé sur la caractérisation des performances des estimateurs de point de rupture. A ce sujet, nous avons publié un article de revue internationale [J10] et un article de conférence internationale [CI7]. Patricio LaRosa est désormais post-doctorant et nous continuons cette étude dans le context bayésien (séjour de 2 semaines à Washington University in St. Louis en mars 2010).

1.6.3 Encadrements de stage de M2-R

- Tran Hoang Tung, Université Paris-Sud 11 et Vietnam National University, "Modèles de bruit hétéroscédastiques non-gaussien en traitement d'antenne". Encadrants : **A. Renaux (90%)** et L.T. Nguyen (10%). Soutenue en décembre 2009. Cette étude n'a pas donné lieu à des publications mais a permis de mettre à jour certaines inexactitudes dans les résultats actuels de la littérature. Nous continuons nos travaux avec L.T. Nguyen (séjour d'une semaines à l'université national du Vietnam en juin 2010).

1.6.4 Encadrements de stage de Magistère ENS

Il s'agit de stages qui ont eu lieu durant 8 semaines en juin et juillet 2010. J'ai été l'encadrant des étudiants suivants, tous deux étudiants fonctionnaires stagiaires à l'ENS Cachan en M1-IST :

- Adrien Mercier sur le thème des performances d'estimation.
- Chengfang Ren sur le thème des performances d'estimation.

1.6.5 Encadrements de stage de TER M2 et M1

Il s'agit d'un Travail d'Etude et de Recherche (TER) de deux semaines que j'ai encadré en Mai 2009. Les deux étudiants du M2-P réseaux et télécom (Université Paris-Sud 11) ont étudié l'implémentation de l'algorithme du maximum de vraisemblance pour la localisation de sources en champ proche.

- Fatou Ndyaye.
- Tojo Nirina Raboanarivola.

1.7 Séjours à l'étranger

1.7.1 Dans le cadre de mes activités de recherches

- **Octobre 2006 - Aout 2007 (11 mois)** : Post-doc à Washington University in St. Louis, USA / Department of Electrical and Systems Engineering. Collaboration avec Arye Nerohai.
- **Décembre 2006 (2 semaines)** : University of California Berkeley. Collaboration avec Cédric Herzet (alors post-doctorant à Berkeley et désormais chargé de recherche à l'INRIA) sur la convergence de l'algorithme EM (au travers de la publication [J5]).
- **Mars 2010 (2 semaines)** : Visiting professor à Washington University in St. Louis, USA / Department of Electrical and Systems Engineering. Collaboration avec Arye Nerohai.
- **Juin 2010 (1 semaine)** : Visiting professor à l'Université nationale du Vietnam, Hanoi. Collaboration avec L.T. Nguyen.
- **Août 2010 (2 semaines)** : National University of Singapore. Collaboration avec J.P. Ovarlez.

1.7.2 Dans le cadre de mes activités d'enseignements

- **Janvier 2008 (2 semaines)** : Université nationale du Vietnam, Hanoi.
- **Janvier 2009 (2 semaines)** : Université nationale du Vietnam, Hanoi.
- **Juin 2010 (1 semaine)** : Université nationale du Vietnam, Hanoi.

1.8 Organisation de conférences

- Organisation d'une journée GDR-ISIS, "Bornes minimales en estimation" avec Rémy Boyer et Jean-Yves Tournet. 08 Sep. 2008. (<http://gdr-isis.org/rilk/gdr/ReunionListe-488>).
- Membre du comité des programmes pour l'*IEEE* International Conferences on Advanced Technologies for Communications (ATC 2009), Hai Phong, Vietnam (<http://www.atc09.org/>).

1.9 Participation à des jury de thèses et M2R

- **Qi Cheng**, Thèse de l'Université Paris-Sud 11. Thèse soutenue le 9 juillet 2009.

CONTRIBUTION À L'ESTIMATION D'ÉTAT DANS LES MODÈLES NON LINÉAIRES.

Composition du jury :

- Messaoud Benidir, Professeur des Universités, Université Paris-Sud 11 (Président)
 - François Dufour, Professeur des Universités, Université de Bordeaux 1 (Rapporteur)
 - Pierre-Olivier Amblard, Directeur de Recherche CNRS, GIPSA Lab, Grenoble (Rapporteur)
 - Jean-Philippe Ovarlez, Maître de Recherche ONERA, Palaiseau (Examineur)
 - Alexandre Renaux, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Examineur)
 - Pascal Bondon, Directeur de Recherche CNRS, L2S, Gif-sur-Yvette (Directeur de thèse)
- **Stéphanie Bay**, Thèse de l'École Normale Supérieure de Cachan. Thèse soutenue le 6 avril 2010.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES BORNES DE CRAMÉR-RAO. APPLICATION À LA SYNCHRONISATION DE PHASE.

Composition du jury :

- Pascal Larzabal, Professeur des Universités, Université Paris-Sud 11 / École Normale Supérieure de Cachan (Président)
- Jean-Pierre Cances, Professeur des Universités, Université de Limoges (Rapporteur)
- Olivier Rioul, Maître de Conférences HDR, Télécom ParisTech (Rapporteur)
- Jean-Marc Brossier, Professeur des Universités, Institut National Polytechnique de Grenoble (Rapporteur)
- Alexandre Renaux, Maître de Conférences, Université Paris-Sud 11 (Invité)
- Benoit Geller, Maître de Conférences HDR, ENSTA ParisTech (Directeur de thèse)
- Jean-Pierre Barbot, Maître de Conférences, École Normale Supérieure de Cachan (Co-directeur de thèse)

En outre, depuis 2008, je participe à un jury de stage de M2R ATSI par an.

1.10 Evaluations d'articles et de projets de recherches

Revues internationales et nationales : total : 59 relectures pour 10 revues

- *IEEE Transactions on Signal Processing* (29 relectures).
- *IEEE Signal Processing Letters* (4 relectures).
- *IEEE Transactions on Information Theory* (4 relectures).
- Elsevier Signal Processing Journal of the European Association for Signal Processing (EURASIP) (11 relectures).
- Springer Signal Image and Video Processing (3 relectures).
- *IEEE Sensors Journal* (2 relectures)
- *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. Special Issue on Performance Limits of Ultra-Wideband Systems (1 relecture).
- Automatica (3 relectures).
- Revue traitement du signal (1 relecture).
- *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (1 relecture).

Evaluations de projets de recherches : total : 2 relectures

- Israel Science Foundation (ISF)(2 relectures)

Livres : total : 1 relecture

- Revue Instrumentation, Mesure et Métrologie (Revue des Systèmes, Hermes-Lavoisier)

Conférences internationales et nationales : total : 29 relectures

J'ai été relecteur pour 21 conférences :

IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP-2005), Bordeaux, France. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2006), Firenze, Italy. *IEEE* International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC-2006), Helsinki, Finland. *IEEE* Workshop on sensor array and multi-channel processing (SAM-2006), Waltham, MA, USA. *IEEE* International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-2007), Honolulu, HI, USA. Fifteenth Annual Workshop on Adaptive Sensor Array Processing (ASAP-2007), Lexington, MA. International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS-2007), Xiamen, China. Neural Information Processing Systems Conference (NIPS-2007), Vancouver, B.C., Canada. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2007), Poznan, Poland. *IEEE* Workshop on Computational Advances in Multi-Channel Sensor Array Processing (CAMSAP-2007), US Virgin Island, USA. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2008), Lausanne, Switzerland. IFAC Symposium on System Identification, (SYSID 2009), Saint-Malo, France. *IEEE* Vehicular Technology Conference (VTC-2009-Fall), Anchorage, AK, USA. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2009), Glasgow, Scotland. *IEEE* Workshop on Statistical Signal Processing (SSP-2009), Cardiff, Wales, UK. *IEEE* International Conferences on Advanced Technologies for Communications (ATC 2009), Hai Phong, Vietnam. *IEEE* Sensor Array Multichannel Workshop (SAM-2010), Kibutz Ma'ale Hahamisha, Israel. *IEEE* Workshop on Statistical Signal Processing (SSP-2011), Nice, France. European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2011), Barcelona, Spain. 23ème Colloque GRETSI 2011, Bordeaux, France. Irish Signals and Systems Conference (ISSC-2011), Dublin, Ireland.

1.11 Activités d'enseignements

Mes enseignements concernent (ou ont concerné) le traitement du signal, le codage de sources, les probabilités, l'analyse, l'algèbre, les signaux et systèmes linéaires, l'automatique, l'algorithmique et langage C dans des filières L3 Information Systèmes et Technologies, M1 Information Systèmes et Technologies, M2-R Automatique et Traitement du Signal, M2-P Réseaux et Télécom de l'université Paris-Sud 11 ainsi qu'en première et deuxième années d'école d'ingénieur (Polytech Paris-Sud, formation d'ingénieur de l'université Paris-Sud 11).

En particulier, je suis ou ai été responsable des modules :

- Signaux et images (M1 IST 452).
- Communications numériques et codage canal (M2P Réseaux et Télécom).
- Automatique (M1 IST 422).

En outre, dans le cadre du pôle universitaire Français (PUF) au Vietnam, les modules du M1-IST de l'université Paris-Sud 11 sont dupliqués à l'université nationale du Vietnam d'Hanoi (mais dispensés en Anglais). Je suis responsable du module 452 : Signaux et images (environ 50 heures de cours/TD/TP hors service). Pour cela je me suis rendu trois années de suite¹ à Hanoi et j'ai rédigé un polycopié d'une centaine de pages dans sa forme actuelle. J'ai également commencé une collaboration scientifique avec Linh-Trung Nguyen (assistant professor, Vietnam National University) sur le thème de la modélisation de bruit par des processus hétéroskedastiques. A ce sujet, nous avons encadré conjointement le stage de M2-R de Tran Hoang Tung.

1. Ce cours n'a pas ouvert pour l'année scolaire 2010-2011 du à un manque d'effectif

J'ai également été moniteur durant 3 ans (2003-2006) à l'IUT de Cachan (Université Paris-Sud 11) au département Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII2) et, durant ma dernière année (DEA 2002-2003) à l'École Normale Supérieure de Cachan, j'ai été vacataire à l'IUT de Vitry (Université Paris 12) au département Génie des Télécommunications et Réseaux (GTR). Durant ces quatre années, mes enseignements ont concerné l'électronique, le traitement du signal, les télécommunications et l'informatique industrielle. C'est ainsi que j'ai enseigné en première année IUT GTR, Licence IUP GEII, Licence professionnelle SEITR, Maîtrise IUP GEII, première année d'école d'ingénieur IFIPS. J'ai également rédigé un polycopié de cours (60 pages) avec exercices et mis au point un TP d'initiation à Matlab.

Le bilan quantitatif est donc le suivant :

2011-2012 Maître de conférences Université Paris-Sud 11 Service provisoire.

L3 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Algèbre linéaire (30 heures equiv. TD de cours/TD)
- Probabilités et statistiques (24 heures de cours, 16 heures de TD et 16 heures de TP)

M1 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Signaux et images (13 heures de cours et 9 heures de TD)
- Automatique (22 heures de cours)

M2R - Automatique et Traitement du Signal (ATS)

- Remise à niveau traitement statistique du signal (12 heures de cours)

M2P - Réseaux et Télécom

- Communications numériques et codage canal (16 heures de cours)

IFIPS (désormais Polytech Paris-Sud)

- Traitement du signal (10H30 heures de TD) IFIPS Dpt Électronique 2ème année

Université de Hanoi - Vietnam

- Signaux et images (21 heures de cours/TD et 9 heures de TP). En collaboration avec un correspondant Vietnamien Linh-Trung Nguyen.

2010-2011 Maître de conférences Université Paris-Sud 11

Obtention (au titre du CNU) d'un demi-CRCT (6 mois) pour l'année scolaire 2010/2011.

L3 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Analyse fonctionnelle (30 heures de TD)

M1 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Signaux et images (9 heures de TD)

M2R - Automatique et Traitement du Signal (ATS)

- Remise à niveau traitement statistique du signal (12 heures de cours)

M2P - Réseaux et Télécom

- Communications numériques et codage canal (16 heures de cours)

IFIPS (désormais Polytech Paris-Sud)

- Traitement du signal (10H30 heures de TD) IFIPS Dpt Électronique 2ème année

2009-2010 Maître de conférences Université Paris-Sud 11

L3 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Probabilités et statistiques (16 heures de TD et 8 heures de TP)

M1 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Signaux et images (13H00 de cours, 9 heures de TD, et 8 heures de TP)
- Codage de sources (4 heures de TD et 12 heures de TP)

M2R - Automatique et Traitement du Signal (ATS)

- Remise à niveau traitement statistique du signal (12 heures de cours)

M2P - SESIS

- Traitement du signal et application sur DSP (16 heures de TP)

M2P - Réseaux et Télécom

- Communications numériques et codage canal (16 heures de cours)

Université de Hanoi - Vietnam

- Signaux et images (21 heures de cours/TD et 9 heures de TP). En collaboration avec un correspondant Vietnamien Linh-Trung Nguyen.

IFIPS (désormais Polytech Paris-Sud)

- Traitement du signal (10H30 heures de TD) IFIPS Dpt Électronique 2ème année
- Outils mathématiques pour le traitement du signal (24 heures de TD et 8 heures de TP) IFIPS Dpt Électronique 1ère année

2008-2009 Maître de conférences Université Paris-Sud 11

L3 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Informatique générale (36 heures de TP)
- Probabilités et statistiques (16 heures de TD et 16 heures de TP)
- Signaux et systèmes linéaires (12 heures de TD)

M1 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Signaux et images (7 H45 de cours, 9 heures de TD, et 24 heures de TP)
- Codage de sources (12 heures de TP)

M2R - Automatique et Traitement du Signal (ATS)

- Remise à niveau traitement statistique du signal (12 heures de cours)

Université de Hanoi - Vietnam

- Signaux et images (42 heures de cours/TD et 9 heures de TP).

IFIPS (désormais Polytech Paris-Sud)

- Traitement du signal (10H30 heures de TD) IFIPS Dpt Électronique 2ème année
- Fonction de l'électroniques (8 heures de TP) IFIPS Dpt Optronique 1ère année
- Outils mathématiques pour le traitement du signal (24 heures de TD et 8 heures de TP) IFIPS Dpt Électronique 1ère année

2007-2008 Maître de conférences Université Paris-Sud 11

L3 - Information Systèmes et Technologie (IST)

- Informatique générale (36 heures de TP)
- Probabilités et statistiques (20 heures de TD et 8 heures de TP)

M1 - Information Systèmes et Technologie (IST) et M1 - Informatique (pour la partie codage de sources)

- Signaux et images (12 heures de TP)
 - Théorie de l'information et codage de source (4 heures de TD et 8 heures de TP)
- M2R - Automatique et Traitement du Signal (ATS) / Réseaux et Télécommunications (RT)
- Codage de sources (8 heures de TP)
 - Remise à niveau traitement du signal (4 heures de TD et 4 heures de TP)

IFIPS Dpt Électronique 1ère année

- Outils mathématiques pour le traitement du signal (24 heures de TD et 8 heures de TP)

IFIPS Dpt Électronique 2ème année

- Traitement du signal (25 heures de TD)

IFIPS Dpt Optronique 2ème année

- Fonction de l'électroniques (40 heures de TP)

Université de Hanoi - Vietnam

- Signaux et images (45 heures de cours/TD et 9 heures de TP).

2005-2006 Moniteur Université Paris-Sud 11 (IUT de Cachan)

- Traitement du signal, IFIPS 1ère année. 20 heures équivalent TD de cours/TD/TP.
- Traitement du signal, Licence professionnel Systèmes embarqués et informatique temps réel (SEITR). 32 heures équivalent TD de cours/TD/TP.

2004-2005 Moniteur Université Paris-Sud 11 (IUT de Cachan)

Électronique, Maîtrise IUP Génie électrique et informatique industrielle (GEII). 88 heures équivalent TD de cours/TD/TP.

2003-2004 Moniteur Université Paris-Sud 11 (IUT de Cachan)

Électronique numérique, Licence IUP Génie électrique et informatique industrielle (GEII). 64 heures équivalent TD de TD/TP.

2002-2003 Vacataire Université Paris 12 (IUT de Vitry)

Télécommunications, 1ère année d'IUT Génie des télécommunications et réseaux (GTR). 60 heures de TP.

1.12 Divers

- Membre du comité de sélection pour le poste MCF-069 (section 61/63) CNAM Paris 2011.
- Obtention (au titre du CNU) d'un demi-CRCT (6 mois) pour l'année scolaire 2010/2011.
- Membre de la CCSU 60-61-62 Université Paris-Sud 11 Collège B 2010.
- Titulaire de la Prime d'Excellence Scientifique (ex PEDR) depuis octobre 2009.
- 2009 Représentant du L2S pour la journée de présentation des laboratoires et master recherches au département EEA de l'École Normale Supérieure de Cachan (journée du 17-12-2009).
- Représentant de la division Signaux du L2S pour la mise en place du nouveau site web du laboratoire (réunions débutées en janvier 2010). (mise en place du cahier des charges, faisabilité technique, etc.)
- Membre du comité de sélection pour le poste MCF-1374 (section 61) Université Paris X Nanterre 2009.
- Qualifié aux fonctions de maître de conférences en section CNU 61 (génie informatique, automatique et traitement du signal) 2006.
- *IEEE* member 2008-présent ; *IEEE* Student member 2006-2007.
- Membre du conseil de laboratoire SATIE (représentant des doctorants) 2005-2006.
- Membre du European Network of Excellence in Wireless COMMunications (NEWCOM) Department 1 (Analysis and Design of Algorithms for Signal Processing at Large in Wireless Systems) and in Departement 2 (MIMO Radio Channel Modelling for Design Optimisation and Performance Assessment of Next Generation Communication Systems) 2004-2006.

Chapitre 2

Synthèse des activités de recherche

Je joins en annexe les articles [J5], [J6], [J7], [J8], [J10], [J12], [J13], [J17], [J19], [CI8], et [CI13] qui me semblent être les contributions les plus pertinentes concernant les activités de recherches détaillées dans ce chapitre. J’ai choisi de détailler uniquement les travaux réalisés avec les thésards que j’ai encadrés. De ce fait, certaines parties de ce chapitre issues de collaborations plus ponctuelles sont volontairement résumées au strict minimum et le lecteur est invité à lire l’annexe correspondante.

2.1 Contexte et premiers résultats

Je décris dans ce chapitre mon activité de recherche depuis mon recrutement en tant que Maître de conférences à l’Université Paris-Sud (octobre 2007) jusqu’à aujourd’hui. Mais, avant de rentrer dans les détails qui ont motivé cette recherche, un rapide voyage vers mes travaux antérieurs (DEA, thèse) s’impose.

Dans le cadre de mon DEA puis de mon doctorat, j’ai étudié le problème de l’estimation de paramètres physiques de signaux multiples captés par un réseau de capteurs. Bien que la motivation initiale ait été d’ordre militaire avec le développement du radar et du sonar pendant la seconde guerre mondiale, les applications civiles sont aujourd’hui nombreuses : positionnement par satellite, téléphonie mobile, etc. Les paramètres d’intérêt peuvent être les directions d’arrivées (localisation de sources), l’amplitude des signaux, le nombre de signaux et plus généralement le canal de propagation. La théorie de l’estimation offre un cadre solide pour résoudre ces problèmes et a fourni une large classe d’algorithmes pour estimer ces différents paramètres d’intérêt. Je me suis focalisé sur les méthodes dites paramétriques qui exploitent un modèle de signaux reçus. Plus particulièrement, en estimation dite paramétrique, on se fixe un modèle d’observation dépendant des paramètres d’intérêt et, à partir d’une règle pré-établie basée sur ce modèle, on estime les paramètres d’intérêt (figure 2.1).

Le modèle d’observation est basé sur les connaissances de l’utilisateur concernant le processus physique considéré. Il dépend généralement d’une fonction non-linéaire des paramètres et incorpore un modèle statistique. La règle d’estimation constitue la pierre angulaire du traitement du signal moderne. Elle conditionne les performances d’estimation, c’est-à-dire le fait que l’estimée soit “suffisamment proche” de la vraie valeur du paramètre et la charge de calcul à mettre en œuvre lors de l’estimation. L’expérience montre qu’un estimateur présentant des performances proches de l’optimalité devient gourmand en charge de calcul alors qu’un estimateur sous-optimal demande une charge de calcul moindre ce qui présente un intérêt en terme d’implémentation pratique.

L’estimation d’un paramètre s’effectue généralement par la recherche d’un maximum global

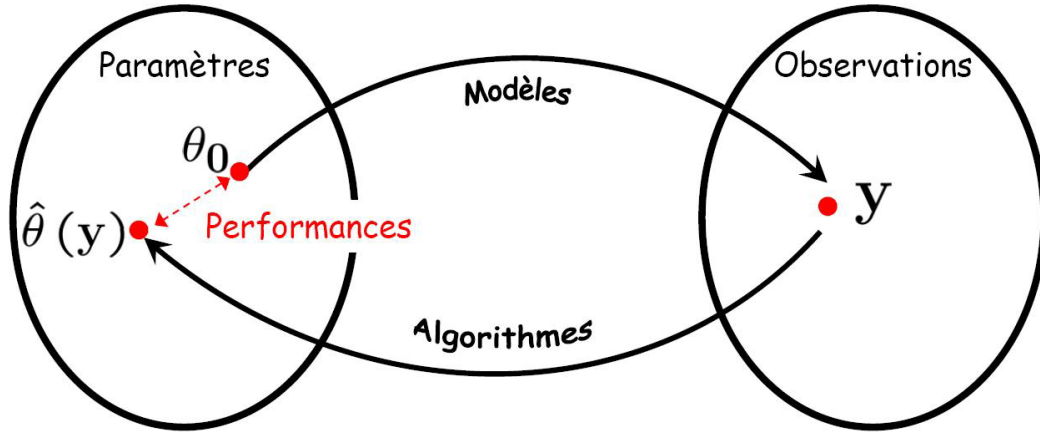


FIGURE 2.1 – Principe de l'estimation paramétrique.

d'un critère dépendant de la règle d'estimation. Lorsque la recherche du paramètre s'effectue sur un support fini, comme par exemple lors de l'estimation d'un angle ou d'une fréquence normalisée, l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimateur qui est l'indicateur de performance le plus répandu s'articule autour de trois régions [Van68] [RB74]. Lorsque le Rapport Signal sur Bruit (RSB) ou le nombre d'observations est élevé, la région est dite asymptotique et l'erreur d'estimation est généralement faible. Lorsque le RSB ou le nombre d'observations décroît, il apparaît un accroissement rapide de l'EQM, donc de l'erreur, dû à l'apparition d'outliers dans le critère. On appelle cette région la zone de décrochement. Enfin, lorsque le RSB ou le nombre d'observations est très faible, le signal observé se réduit principalement à la composante de bruit, ce qui conduit à une distribution de l'estimée quasi-uniforme sur le support du paramètre. L'EQM exhibe alors un comportement plat : c'est la zone de non-information.

La figure 2.2 donne l'évolution de l'EQM de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de la fréquence d'une cisoïde bruitée (gaussien), pour les trois régions susmentionnées (10 observations et 10000 réalisations).

La zone de décrochement d'un estimateur délimite sa zone de fonctionnement optimal, c'est-à-dire la zone où l'on peut faire abstraction des outliers dans l'étude des performances. Avec le durcissement des cahiers des charges (temps d'acquisitions réduits, environnements électromagnétiques perturbés, etc...), les estimateurs sont désormais amenés à travailler dans une région de plus en plus proche de cette limite, voire en dessous. En conséquence, la connaissance de la valeur du RSB ou du nombre d'observations, pour un scénario donné, pour laquelle cette rupture brutale des performances apparaît est fondamentale dans l'étude des performances d'estimation et doit être considérée au même titre que l'étude du biais ou de la variance.

La borne de Cramér-Rao (BCR) [Fis22] [Dug37] [Fre43] [Dar45] [Rao45] [Cra46] est également reportée sur la figure 2.2. Elle donne la variance minimale qu'un estimateur non biaisé peut espérer atteindre et est l'outil le plus utilisé par la communauté du traitement du signal pour porter un jugement sur les performances d'un estimateur. Un estimateur qui atteint la BCR est dit efficace. On pourra noter sur cet exemple l'efficacité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Néanmoins, dans les zones non-asymptotiques, c'est-à-dire la zone de décrochement et la zone de non-information, la BCR n'est plus pertinente puisqu'elle repose sur un développement limité à l'ordre 1 de l'erreur alors que la présence d'outliers est un phénomène global.

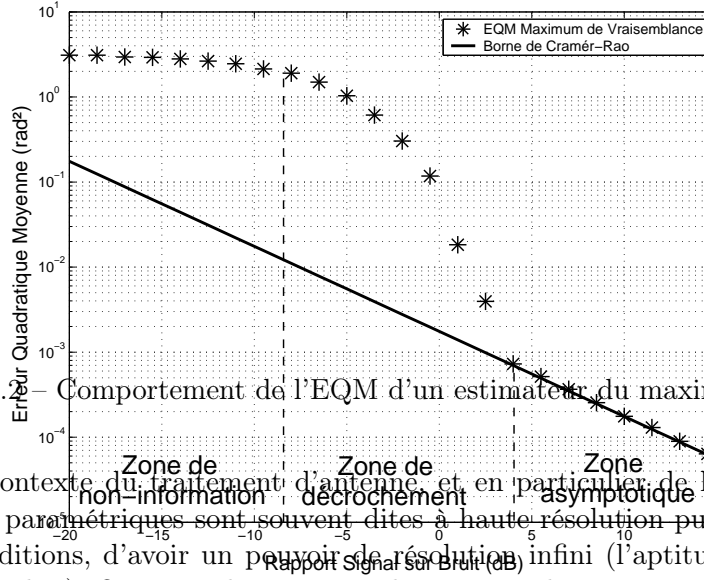


FIGURE 2.2 – Comportement de l'EQM d'un estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans le contexte du traitement d'antenne, et en particulier de la localisation des sources, les méthodes paramétriques sont souvent dites à haute résolution puisqu'elles permettent, sous certaines conditions, d'avoir un pouvoir de résolution infini (l'aptitude à séparer deux sources infiniment proches). On peut classer ces techniques en deux catégories : les méthodes de sous-espaces et la méthode du maximum de vraisemblance. Les méthodes de sous-espaces s'appuient sur une décomposition de l'espace des observations, grâce à la matrice de covariance des observations, en deux sous-espaces : le sous-espace signal et le sous-espace bruit, et exploitent la propriété d'orthogonalité entre ceux-ci. On citera par exemple la méthode MUSIC (Multiple Signal Classification) [Sch81] et ses nombreuses variantes : l'algorithme Min-Norm [KT83], ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [PRK86], WSF (Weighted Subspace Fitting) [VOK91], etc. Les méthodes de sous-espaces requièrent généralement une simple optimisation mono-dimensionnelle. La méthode du maximum de vraisemblance s'appuie quant à elle sur une exploitation des connaissances statistiques des observations par l'intermédiaire de la fonction de vraisemblance. La méthode du maximum de vraisemblance conduit à l'optimisation d'un critère multi-dimensionnel. Elle est souvent qualifiée "d'optimale" pour ses bonnes propriétés statistiques en termes de consistance et d'efficacité. Le revers de la médaille est bien sûr une charge de calcul élevée pour la méthode du maximum de vraisemblance, mais l'augmentation de la puissance des calculateurs a conduit la communauté du traitement du signal à s'y intéresser.

Dans ce cadre, mes activités de recherche au sein du laboratoire SATIE (DEA et doctorat) se sont articulées selon deux axes.

Premièrement, nous avons caractérisé le comportement des estimateurs de directions d'arrivées dans la zone asymptotique en RSB et pour un nombre d'observations fini. En effet, si les performances asymptotiques en terme de nombre d'observations ont été largement étudié dans la littérature [SN90b] [SN90a] [VO91] les performances asymptotiques en terme de RSB (pour un nombre d'observations fini) ont été très peu traitées (par exemple par le biais de simulations dans [Ath05]).

Dans le contexte d'estimation de directions d'arrivées, il existe deux méthodes du maximum

de vraisemblance dépendant du modèle des signaux sources. Lorsque les signaux sources sont modélisés par un processus aléatoire gaussien, on parle de la méthode du Maximum de Vraisemblance Stochastique (MVS) [Böh86]. Ce modèle trouve son utilité dans des applications où le théorème de la limite centrale est applicable, par exemple, l'estimation d'échos Doppler en météorologie (étude d'orages) ou encore la localisation de cibles avec un large nombre de points brillants. Ce modèle est intéressant dans le sens où, en plus des directions d'arrivées et de la puissance du bruit, il reste à estimer la matrice de covariance finie des signaux reçus. D'un autre côté, lorsque les signaux sources sont supposés déterministes, on parle de la méthode du Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD) [Böh84]. Ce modèle trouve son utilité dans des applications où le modèle gaussien pour les signaux est inapplicable, par exemple pour des signaux de communications numériques. Ici il faut non seulement estimer les directions d'arrivées et la puissance du bruit, mais également l'amplitude des signaux pour chaque observation ce qui devient problématique pour un grand nombre d'observations.

- Dans le cadre du MVS, c'est-à-dire lorsque les signaux sources sont modélisés par un processus aléatoire gaussien, nous avons démontré que l'estimateur du MVS pour les directions d'arrivées est non-gaussien et non-efficace (il n'atteint pas la borne de Cramér-Rao stochastique) lorsque le nombre d'observations T est fini et le RSB infini [RFBL04] [RFBL] [FBLR03]. Ce résultat est valide quel que soit le nombre de sources et quelle que soit la géométrie de l'antenne. Dans le cas d'un scénario à une seule source, nous avons démontré que la loi de l'estimateur est une loi de student à $2T$ degrés de liberté et que la variance de l'estimée était égale à $T/(T - 1)$ fois la borne de Cramér-Rao stochastique. Dans le cas d'un scénario à deux sources nous avons établi une forme analytique de la matrice de covariance des estimées [RFB04] [RFBL]. Ces résultats sont en opposition avec le cas où le nombre d'observations tend vers l'infini où l'estimateur du MVS est connu pour être gaussien et efficace [SN90a].
- Lorsque les signaux sources sont supposés déterministes, nous avons établi la gaussianité et l'efficacité asymptotique en RSB de l'estimateur du MVD quel que soit le nombre de sources et quelle que soit la géométrie de l'antenne [RFCL06]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Eric Chaumette, à l'époque à Thales Air Defence et désormais à l'ONERA. Ces résultats sont à opposer au cas où le nombre d'observations tend vers l'infini où l'estimateur du MVD est connu pour être gaussien mais non-efficace (puisque le nombre de paramètres à estimer tend vers l'infini) [SN90b].

La figure 2.3 résume les deux résultats principaux que nous avons obtenus sur les performances des méthodes du Maximum de Vraisemblance en traitement d'antenne.

La seconde partie de notre étude a été dédiée à la prédiction du décrochement susmentionné et à l'étude des performances des estimateurs dans les trois zones de fonctionnement. Dans ce contexte, nous avons d'abord étudié et établi des bornes inférieures de l'EQM plus précises que la borne de Cramér-Rao. En effet, celle-ci devient trop optimiste dans la zone non-asymptotique et ne rend pas compte du phénomène de décrochement. L'étude des bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne constituent la part la plus importante de ma thèse et de tous les travaux que j'ai effectués depuis lors.

Les bornes inférieures de l'EQM fournissent des indications sur les performances ultimes qu'un estimateur peut espérer atteindre pour un modèle d'observation donné. En conséquence, elles sont utilisées comme "benchmarks" afin de jauger les performances d'un estimateur et de savoir si, à partir d'un cahier des charges donné, une amélioration est possible. Il existe une pléthore de bornes inférieures de l'EQM qui ont été dérivées depuis plus de soixante ans à l'aide de différentes

	MV stochastique	MV déterministe
Observations $\rightarrow \infty$ (RSB fini) [SN90]	Gaussien Efficace	Gaussien Non-efficace
RSB $\rightarrow \infty$ (Observations finies) Renaux et al.	Non-gaussien Non-efficace	Gaussien Efficace

FIGURE 2.3 – Performances asymptotiques des méthodes du Maximum de Vraisemblance en traitement d'antenne

inégalités mathématiques telles que : l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Kotelnikov, l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Ibragimov-Hasminskii, l'inégalité de Bhattacharyya, l'inégalité de Kiefer, etc.

Les bornes inférieures de l'EQM se classent en deux catégories distinctes : les bornes déterministes lorsque les paramètres θ_0 sont supposés déterministes et les bornes bayésiennes lorsque les paramètres θ sont supposés aléatoires avec une densité de probabilité *a priori* $p(\theta)$. Les bornes déterministes sont : la borne de Cramér-Rao [Fis22] [Dug37] [Fre43] [Dar45] [Rao45] [Cra46], la borne de Bhattacharyya [Bha46] [FG52], la borne de Chapman-Robbins [Ham50] [CR51] [Kie52], la borne de Barankin [Bar49] [MS69], et la borne d'Abel [Abe90] [Abe93]. Les bornes bayésiennes se sub-divisent en deux catégories : les bornes de la famille Ziv-Zakai qui dérivent d'un problème de test d'hypothèse binaire (et plus généralement d'un test d'hypothèses M -aires) et les bornes de la famille Weiss-Weinstein qui dérivent, comme les bornes déterministes, d'un principe d'inégalité de covariance. La famille Ziv-Zakai est composée de la borne de Ziv-Zakai [ZZ69], de la borne de Bellini-Tartara [BT74], de la borne de Chazan-Zakai-Ziv [CZZ75], de la borne de Weinstein [Wei88], de la borne de Bell-Steinberg-Ephraïm-VanTrees [BSET97] et de la borne de Bell [Bel95]. La famille Weiss-Weinstein est composée de la borne de Cramér-Rao bayésienne [Van68], de la borne de Bobrovsky-MayerWolf-Zakai [BMWZ87], de la borne de Bhattacharyya bayésienne [Van68], de la borne de Bobrovsky-Zakai [BZ76], de la borne de Reuven-Messer [RM97] et de la borne de Weiss-Weinstein [WW85].

Il faut garder présent à l'esprit que les bornes déterministes sont des minorants de l'EQM locale en θ_0 c'est-à-dire de

$$\mathbf{EQM}_{locale}(\theta_0) = \int_{\Omega} \left(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta_0 \right) \left(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta_0 \right)^H p(\mathbf{y}|\theta_0) d\mathbf{y}, \quad (2.1)$$

où $\mathbf{y} \in \Omega$ est un vecteur aléatoire d'observations, $p(\mathbf{y}|\theta_0)$ représente la vraisemblance des observations paramétrée par la vraie valeur du paramètre θ_0 dont $\hat{\theta}(\mathbf{y})$ est un estimateur.

D'un autre côté, les bornes bayésiennes sont des minorants de l'EQM globale, c'est-à-dire de

$$\mathbf{EQM}_{globale} = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \left(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta \right) \left(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta \right)^H p(\mathbf{y}, \theta) d\mathbf{y} d\theta, \quad (2.2)$$

où $\theta \in \Theta$ est le vecteur de paramètres aléatoires muni d'une densité de probabilité *a priori* $p(\theta) = \frac{p(\mathbf{y}, \theta)}{p(\mathbf{y}|\theta)}$ où $p(\mathbf{y}, \theta)$ est la densité de probabilité jointe des observations et des paramètres.

Cette profusion désordonnée a nuit à l'utilisation et à la dissémination de ces bornes puisqu'il devenait difficile pour le chercheur non spécialiste de discerner les différents concepts théoriques sous-jacents à leur l'établissement permettant de les retranscrire dans le contexte d'un problème d'estimation spécifique.

Les travaux théoriques sur les bornes minimales que nous avons menés sont basés sur les résultats concernant l'unification des bornes déterministes [Gla72]. En effet, l'ensemble des bornes déterministes peut être exprimé comme la solution d'un problème de minimisation sous contraintes. Le choix spécifique des contraintes conduit aux différentes bornes déterministes.

- En adoptant la même démarche, nous avons unifié les bornes Bayésiennes de la famille Weiss-Weinstein [RFL05a] [RFL05b] [RFL⁺08]. Nous avons démontré que cette famille est également la solution d'un problème d'optimisation sous contraintes. Particulièrement, nous avons établi un pont entre les bornes susmentionnées et la "meilleure" borne bayésienne : l'EQM de l'estimateur de la moyenne conditionnelle. Ceci nous a permis d'établir une relation d'ordre entre les différentes bornes souvent inaccessible dans les développements traditionnels exploitant une inégalité de covariance. Ce point sera approfondi dans la suite de ce chapitre et le lecteur pourra également se reporter à l'**annexe C**.
- De plus, ces contraintes sont sensiblement similaires aux contraintes intervenant dans l'unification des bornes déterministes. A la lumière d'une telle analogie, il est apparu que toutes les bornes déterministes ont une version Bayésienne dans la famille Weiss-Weinstein et vice versa. Ceci nous a conduit à proposer deux nouvelles bornes minimales : la version Bayésienne de la borne d'Abel [RFLR06] en collaboration avec Christ Richmond du MIT Lincoln Laboratory (USA) et la version déterministe de la borne de Weiss-Weinstein. Cette dernière apparaît comme un outil performant dans l'étude de la prédiction du décrochement et est encore actuellement à l'étude (voir l'**annexe K** pour les avancées récentes de ce travail).

Afin de tirer partie des résultats théoriques obtenus, nous avons appliqué ces bornes à différents problèmes d'estimation.

Dans ce contexte, j'ai participé au réseau d'excellence Européen NEWCOM (Network of Excellence in Wireless COMMunications) dont le but est de renforcer les liens entre les différents groupes de recherche leader dans le domaine des "systèmes de communications numériques sans fils après la 3G". L'un des problèmes majeurs est la caractérisation des performances d'estimation traitée au sein du Département 2 (MIMO Radio Channel Modelling for Design Optimisation and Performance Assessment of Next Generation Communication Systems).

- Nous avons proposé une forme simplifiée des bornes d'Abel (déterministe et bayésienne). Cette forme dépend explicitement de la borne de Cramér-Rao (bayésienne) et de la borne de Chapman-Robbins (Bobrovsky-Zakaï dans le contexte bayésien). Elle est plus pertinente que ces deux dernières sans nécessiter une charge de calcul supplémentaire [RAFL07].
- Pour un problème de communications numériques (estimation de fréquences porteuses avec symboles pilotes) et d'analyse spectrale, nous avons proposé différentes formes analytiques pour l'ensemble des bornes déterministes et bayésiennes de la famille Weiss-Weinstein [Ren07].
- La plupart des bornes étudiées requièrent une maximisation par rapport à des paramètres appelés points tests. Nous avons étudié le comportement de ces points tests et nous en avons déduit des bornes moins gourmandes en charge de calcul [RAFL07].
- Nous avons également montré comment l'évolution de la valeur optimale des points tests permet de prédire de manière automatique les valeurs de RSB ou du nombre d'observations pour lesquelles le décrochement des estimateurs apparaît [RAFL07]. Les bornes de Weiss-Weinstein (déterministe et bayésienne) se sont révélées être un outil intéressant pour prédire

le décrochement des estimateurs.

Dans la suite de ce chapitre je m'attacherai à détailler les travaux de recherche que j'ai effectué lors de mon post-doctorat et mon intégration à l'Université Paris-Sud. Il sera découpé en deux parties où j'ai choisi de présenter les travaux que je juge théoriques puis les travaux qui consistent en une application des bornes inférieures de l'EQM à des problèmes de traitement du signal.

2.2 Aspects théoriques

Dans cette section, je présente les aspects théoriques de mes travaux. Il s'agit de comprendre les bornes inférieures de l'EQM pour elles mêmes et sans forcément chercher une finalité applicative.

2.2.1 Bornes déterministes

J'ai travaillé, en collaboration avec Eric Chaumette, ONERA, sur différents aspect permettant d'unifier et d'étendre les bornes déterministes (lorsque les paramètres sont supposés déterministes) :

- Une grande variété de traitement incorpore un test de detection binaire afin de réduire le jeu des observations et d'estimer les paramètres d'intérêt. Ce conditionnement n'était pas pris en compte lors de l'établissement des bornes inférieures de l'EQM. Nous avons réécrit ces bornes dans ce contexte et les avons appliquées aux traitements de données radar. Voir [CGV⁺07] pour les détails.
- Les bornes déterministes sont un outil particulièrement utile pour approximer la valeur du RSB pour laquelle l'EQM d'un estimateur décroche. L'une des bornes capable de prédire ce décrochement est la borne de Barankin et, plus précisément, les différentes approximations de cette borne. Ces approximations résultent d'une transformation linéaire de la contrainte de biais nulle uniforme introduite par Barankin. Néanmoins, il existe également des transformations non-linéaires qui peuvent être utilisées pour certaine classe de densité de probabilité des observations. Nous avons mélangé ces transformations (linéaires et non-linéaires) afin d'obtenir de nouvelles bornes plus précises pour la prédiction du décrochement. Voir **annexe J** et **annexe K** pour les détails.

2.2.2 Bornes bayésiennes

Il s'agit en fait d'un travail commencé durant ma thèse mais dont les démonstrations ainsi qu'une présentation plus claire ont été continuées durant mon séjour post-doctoral et ont été publiées dans [RFL⁺08] (joint en **annexe C**). La famille Weiss-Weinstein repose sur un principe d'inégalité de covariance et de ce fait semble plus naturelle que les bornes de la famille Ziv-Zakai pour lesquelles une réécriture astucieuse de l'EQM est nécessaire. Nous avons présenté une unification des bornes de la famille Weiss-Weinstein basée sur l'unification précédemment proposée pour les bornes déterministes dans [Gla72]. Il est bon de noter qu'une première approche pour l'unification des bornes de la famille Weiss-Weinstein a déjà été proposée par Weiss et Weinstein dans [WW88]. Cette approche se fonde sur l'inégalité suivante démontrée dans [WW88]

$$EQM_{globale} \geq \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{y},\theta}^2 [\theta \psi(\mathbf{y}, \theta)]}{\mathbb{E}_{\mathbf{y},\theta} [\psi^2(\mathbf{y}, \theta)]}, \quad (2.3)$$

où l'espérance mathématique porte sur la loi jointe $p(\mathbf{y}, \theta)$ et où la fonction $\psi(\mathbf{y}, \theta)$ doit vérifier

$$\int_{\Theta} \psi(\mathbf{y}, \theta) p(\mathbf{y}, \theta) d\theta = 0. \quad (2.4)$$

Weiss et Weinstein donnent plusieurs fonctions $\psi(\mathbf{y}, \theta)$ vérifiant (2.4) pour lesquelles on retrouve la borne de Cramér-Rao bayésienne, la borne de Bhattacharyya bayésienne, la borne de Bobrovsky-Zakaï et la borne de Weiss-Weinstein. Malheureusement, il n'existe pas de règle générale pour trouver $\psi(\mathbf{y}, \theta)$ et cette étude ne permet pas de déduire systématiquement une relation d'ordre entre les différentes bornes. Ici, l'unification de la famille Weiss-Weinstein s'appuie sur la meilleure borne bayésienne, à savoir l'EQM de l'estimateur de la moyenne conditionnelle. En réécrivant cette EQM nous unifions la borne de Cramér-Rao bayésienne, la borne de Bhattacharyya bayésienne, la borne de Bobrovsky-Zakaï, la borne de Reuven-Messer, la borne de Bobrovsky-MayerWolf-Zakaï et la borne de Weiss-Weinstein. L'intérêt de cette approche provient du fait qu'elle nous permet d'obtenir des relations d'ordre entre les différentes bornes proposées puisque nous les comparons directement à la borne ultime.

Dans le contexte bayésien, l'EQM globale minimale est obtenue par l'estimateur de la moyenne conditionnelle $\hat{\theta}(\mathbf{y}) = \int_{\Theta} \theta p(\theta | \mathbf{y}) d\theta$. L'obtention d'une forme analytique de cette EQM est un problème généralement non-trivial. L'estimateur de la moyenne conditionnelle est solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{\hat{\theta}(\mathbf{y})} \int_{\Omega} \int_{\Theta} (\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta)^2 p(\mathbf{y}, \theta) d\theta d\mathbf{y}. \quad (2.5)$$

On peut réécrire ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes

$$\begin{cases} \min_v \int_{\Omega} \int_{\Theta} v^2(\mathbf{y}, \theta) p(\mathbf{y}, \theta) d\theta d\mathbf{y} \\ \text{sujet à } v(\mathbf{y}, \theta) = \hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta \end{cases} \quad (2.6)$$

D'un autre côté, en posant $\mathbf{x} = [\mathbf{y}^T \quad \theta]^T$ et $v(\mathbf{y}, \theta) = \frac{u(\mathbf{y}, \theta)}{\sqrt{p(\mathbf{y}, \theta)}}$, la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\begin{cases} \min_v \int_{\Omega} \int_{\Theta} v^2(\mathbf{y}, \theta) p(\mathbf{y}, \theta) d\theta d\mathbf{y} \\ \text{sujet à } \int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{y}, \theta) g_k(\mathbf{y}, \theta) \sqrt{p(\mathbf{y}, \theta)} d\theta d\mathbf{y} = c_k \quad k = 0, \dots, K, \end{cases} \quad (2.7)$$

est donnée par le résultat suivant :

Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{N \times 1}(\mathbb{R})$ un vecteur réel. Soient $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ deux fonctions de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Soit

$$\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

un produit scalaire de ces deux fonctions et sa norme associée $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle$. Soit $u(\mathbf{x}), g_0(\mathbf{x}), \dots$, et $g_K(\mathbf{x})$, un jeu de fonctions de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ et c_0, c_1, \dots , et c_K , $K + 1$ nombres réels. Alors, le minimum de $\|u(\mathbf{x})\|^2$ avec les $K + 1$ contraintes

$$\langle u(\mathbf{x}), g_k(\mathbf{x}) \rangle = c_k \quad \text{pour } k = 0, \dots, K, \quad (2.9)$$

est donné par

$$\begin{cases} \min_u \|u(\mathbf{x})\|^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c}, \\ \text{sujet à (2.9)}, \end{cases} \quad (2.10)$$

avec

$$\mathbf{c} = [c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_K]^T, \quad (2.11)$$

et

$$G_{m,n} = \langle g_m(\mathbf{x}), g_n(\mathbf{x}) \rangle. \quad (2.12)$$

□

Nous avons établi l'équivalence entre l'unique contrainte du problème d'optimisation (2.6) et un continuum de contraintes particulières du problème d'optimisation (2.7). Ce continuum n'est pas utilisable en l'état dans le théorème précédent, puisque par définition, il correspond à une infinité de contraintes qui conduirait à un vecteur \mathbf{c} et une matrice \mathbf{G} de dimensions infinies. Néanmoins, en réduisant ce continuum, c'est-à-dire en choisissant des valeurs particulières pour $f(\mathbf{y}, \theta)$, h , et s en nombre fini, on obtiendra, par le théorème précédent, une EQM minimale globale inférieure à l'EQM de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, donc, par définition, à des bornes minimales d'estimation. Le choix des paramètres $f(\mathbf{y}, \theta)$, h , et s donne une appréciation de la "distance" à l'EQM de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, c'est-à-dire que plus on choisira de valeurs, plus on se rapprochera du continuum et donc de la meilleure borne minimale. Les choix des paramètres $f(\mathbf{y}, \theta)$, h , et s conduisant aux différentes bornes de la famille Weiss-Weinstein ainsi que les preuves et détails calculatoires sont donnés en **annexe C**.

2.2.3 Bornes hybrides

Nous avons parlé dans les sections précédentes de la borne de Cramér-Rao déterministe (BCR) et de la borne de Cramér-Rao bayésienne (BCRB). Ces deux bornes sont parmi les bornes les plus utilisées dans les problèmes classiques de traitement du signal. Cependant certains scénarios nécessitent l'estimation conjointe de paramètres déterministes et de paramètres aléatoires. Dans de tels cas, ni la BCR, ni la BCRB ne permettent d'évaluer les performances de l'estimation réalisée et il n'est pas toujours cohérent de contourner le problème grâce à une marginalisation ou grâce à une borne de Cramér-Rao modifiée. Le problème a été partiellement résolu par l'introduction d'une borne de Cramér-Rao dite hybride permettant de considérer un vecteur paramètres d'intérêt composé de paramètres déterministes et aléatoires [RS87a, RS87b, Mes06]. Cette borne hybride a été démontrée avec des hypothèses restrictives pour répondre à des scénarios particuliers qui avaient la particularité de présenter des paramètres aléatoires $\boldsymbol{\mu}_r$ et déterministes $\boldsymbol{\mu}_d$ (avec $\boldsymbol{\theta}^T = [\boldsymbol{\mu}_r^T, \boldsymbol{\mu}_d^T]^T$) indépendants c'est à dire tels que :

$$p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) = p(\boldsymbol{\mu}_r). \quad (2.13)$$

Les formules alors utilisées, en particulier dans [Mes06], ne sont donc pas valables dans le cas général.

Nous avons généralisé le travail mené par [RS87a, RS87b] dans le but d'avoir une formulation de la borne de Cramér-Rao générale et ce, quelle que soit la nature des paramètres d'intérêt (déterministes et/ou aléatoires). Ce travail a été effectué lors de la thèse de doctorat de Stéphanie Bay et les détails sont donnés en annexe B.

Nous avons défini la matrice d'information hybride (MIH) de la manière suivante

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d) \triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d} \left[-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) \right] \quad (2.14)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d} \left[(\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d)) (\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d))^T \right], \quad (2.15)$$

En développant la log-vraisemblance :

$$\ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) = \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\mu}_d) + \ln p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d),$$

nous obtenons :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})] + E_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d} [\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \ln p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d)],$$

où $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice d'information de Fisher

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}} \left[-\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (2.16)$$

Nous avons ensuite démontré que l'inverse de la matrice d'information hybride est un mineur de l'EQM du vecteur paramètre d'intérêt $\boldsymbol{\theta}$. La démonstration est similaire à celle menée dans [Mes06] mais avec certaines hypothèses moins restrictives ce qui constitue une généralisation de l'inégalité de Cramér-Rao :

Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est un estimateur non biaisé du vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\mu}_r^T \quad \boldsymbol{\mu}_d^T]^T$, alors

$$\mathbf{C}_{H\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\mu}_d) \geq (\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d))^{-1} = \left(\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d} \left[-\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) \right] \right)^{-1}, \quad (2.17)$$

où $\mathbf{C}_{H\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\mu}_d)$ est la matrice de covariance, et $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ la matrice d'information de Fisher.

Pour illustrer ce résultat, nous avons appliqué cette borne dans le cadre de l'estimation d'un offset de phase et de sa dérive linéaire dans le cas d'une transmission MPD2. Différentes contributions ont déjà partiellement traité ce problème. En particulier, dans leur article [BC07], Barbieri et Colavolpe ont calculé la borne de Cramér-Rao associée à l'estimation d'un offset de phase en considérant le bruit de phase comme un paramètre de nuisance dans une transmission data-aided. Nous avons de plus montré que la borne hybride présentée dans l'article de Messer [Mes06] conduit à une impasse en aboutissant à une matrice d'information non inversible.

On souhaite transmettre une séquence binaire non codée à travers un canal perturbé par un bruit additif blanc et gaussien. Après échantillonnage, les observations $\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_K]^T$ s'écrivent en bande de base :

$$y_k = a_k e^{j\theta_k} + n_k \quad \text{avec } k = 1 \dots K, \quad (2.18)$$

où a_k représente le $k^{\text{ème}}$ bit transmis inconnu. n_k représente toujours un bruit additif, circulaire, blanc, gaussien de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Les symboles transmis sont considérés indépendants et identiquement distribués. Différentes sources de bruit viennent perturber la récupération de la phase. Nous avons travaillé sur un modèle général qui prend en compte la dérive linéaire présente dans chaque système de transmission ainsi qu'un bruit de phase de variance inconnue :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \xi + w_k, \quad (2.19)$$

où θ_k représente la phase que nous souhaitons estimer, ξ représente la dérive linéaire qui est un paramètre déterministe mais inconnu. w_k est un bruit additif blanc gaussien indépendant et identiquement distribué, de moyenne nulle et de variance σ_w^2 inconnue. Ce modèle est couramment utilisé pour décrire le comportement d'oscillateurs réels [McN94, DMR00]. Un des points intéressants à remarquer est que les observations sont indépendantes mais non identiquement distribuées. La log-vraisemblance s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_K, \boldsymbol{\mu}_d) &= \sum_{k=1}^K \ln \left(\sum_{a \in \{-1, +1\}} p(y_k|a_k = a, \theta_k, \sigma_n) p(a_k = a) \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\ln(-\pi\sigma_n^2) - \frac{1 + |y_k|^2}{\sigma_n^2} + \ln \left(\cosh \left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(y_k e^{-j\theta_k}) \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\boldsymbol{\mu}_d \triangleq [\xi \ \sigma_n \ \sigma_w]^T$, et $\boldsymbol{\theta}_K = [\theta_1 \cdots \theta_K]^T$. Les symboles a_k sont considérés comme des paramètres de nuisance. \mathbf{y} représente le vecteur d'observation et le vecteur paramètre d'intérêt est la concaténation de deux vecteurs, l'un représentant les paramètres inconnus déterministes $\boldsymbol{\mu}_d$ et l'autres les paramètres inconnus aléatoires :

$$\boldsymbol{\mu} \triangleq [\boldsymbol{\mu}_r^T \ \boldsymbol{\mu}_d^T]^T \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_r &\triangleq \boldsymbol{\theta}_K = [\theta_1 \cdots \theta_K]^T, \\ \boldsymbol{\mu}_d &\triangleq [\xi \ \sigma_n \ \sigma_w]^T. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le lecteur trouvera en **annexe B** l'expression analytique de la borne de Cramér-Rao hybride ainsi que quelques résultats de simulations.

2.3 Aspects applicatifs

Je vais maintenant détailler les travaux qui concernent l'application des bornes inférieures de l'EQM à des problèmes de traitement du signal. Depuis mon post-doctorat (2006-2007) et mon recrutement en temps que Maître de Conférence en octobre 2007, mon activité de recherche a principalement consisté à montrer à la communauté scientifique l'utilité des bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le traitement du signal. En particulier, j'ai souhaité accentuer mes recherches vers le fait que ces bornes ne sont pas de simple outils théoriques mais qu'elles peuvent être utiles en pratique dans les systèmes multi-capteurs du futur. Nous avons travaillé sur les bornes de Cramér-Rao qui restent une bonne source d'information concernant les performances asymptotiques des estimateurs, mais aussi sur la borne de Barankin et ces approximations ainsi que sur la borne de Weiss-Weinstein.

2.3.1 Borne de Cramér-Rao

2.3.1.1 Applications directes

2.3.1.1.1 Localisation de source en champ proche Dans le cadre de la thèse de Mohammed Nabil El Korso, nous nous sommes intéressés à la localisation de source en champ proche. La localisation passive de sources à l'aide d'une antenne composée d'un réseau de capteurs est un sujet d'une importance croissante avec plusieurs applications à la clef : radar, sismologie, communication numériques, etc. Le cas de la localisation de sources en champ lointain a été largement traité et une pléthore d'algorithmes d'estimation a été proposée dans la littérature [Kie52, Cap69, LC03b, KT83, LVT89, Van95, CM97, KV96, Mar98, Van02, SM05b]. Dans cette configuration, on peut faire l'hypothèse que les fronts d'ondes sont plans. Cependant, si les sources sont localisées dans le champ proche, la courbure des fronts d'ondes incidents sur les capteurs ne peut plus être négligée. Par conséquent, chaque source doit être caractérisée par son azimuth et sa distance (la distance entre la source et un point de référence sur l'antenne considérée). Il existe différents algorithmes d'estimation adaptés à ce problème [HB91, YF98, GAMH05, ZC07, EBBM09], mais il existe très peu de travaux étudiant les performances optimales associées à ce modèle.

En traitement d'antenne on peut distinguer deux types de modèles concernant les signaux issus de sources [Van68, SN89, Kay93, OVSN93] : 1) le modèle déterministe (ou conditionnel), c'est-à-dire, où l'on suppose que les signaux sont déterministes mais inconnus, et 2) le modèle stochastique (ou inconditionnel), c'est-à-dire, où l'on suppose que les signaux émis suivent une loi Gaussienne complexe circulaire de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ inconnue. La validité du modèle dépend de l'application en question. En effet, l'hypothèse du modèle stochastique n'est pas valable pour des applications telles que le radar avec des formes d'onde connues à l'émission [Van01, BT06, NS09] ou la communication radio [LC03a] par exemple. Dans ce cas, le choix légitime serait alors de considérer un modèle déterministe. Cependant, d'autres applications sont mieux décrites par le modèle stochastique, comme, le traitement sismique [Van02] ou la tomographie [Hay85].

Pour caractériser les performances des estimateurs, la borne de Cramér-Rao (BCR) est un outil mathématique très utilisé en traitement du signal. Cette dernière exprime une borne inférieure de la matrice de covariance d'erreur de tout estimateur non biaisé [Cra46]. Bien entendu, la BCR dépend du modèle considéré. De ce fait, dans le cas de l'estimation de direction d'arrivée d'une source située en champ proche nous avons étudié les deux BCRs ; la BCR pour le modèle déterministe, dénommée la BCR déterministe (BCRD) et la BCR pour le modèle aléatoire, dénommée la BCR stochastique (BCRS). Il faut noter qu'asymptotiquement, la BCRS est atteinte en terme de nombre d'observations par l'estimateur du maximum de vraisemblance stochastique (MVS) [SN89, OVSN93]. La BCRD est, quant à elle, atteinte asymptotiquement en terme de rapport signal à bruit (RSB) (ou en nombre de capteurs) par l'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe (MVD) [RFCL06].

La plupart des résultats existants dans la littérature sur la BCRS et la BCRD concerne la localisation de sources en champ lointain. De plus, il est important de dire que la majeure partie de ces résultats donnent seulement des expressions matricielles de la matrice d'information de Fisher (MIF) qui est l'inverse de la BCR. De ce fait, le coût calculatoire associé à la BCR est très important pour un grand nombre des observations (en ce qui concerne la BCRD) ou un grand nombre de capteurs (en ce qui concerne la BCRS), d'où la nécessité d'avoir des expressions non matricielles pour le calcul de la BCR. Dans [SN90a], la BCRS a été indirectement calculée dans le cas asymptotique (en terme de nombre des observations) comme étant équivalente à la matrice de covariance du MVS. Dix ans après, Stoica *et al.* [SLG01], Pesavento et Gershman [PG01] et Gershman *et al.* [GSPL02] ont recalculé la BCRS sous forme matricielle (avant inversion de la MIF qui est simplement donnée par la formule de Slepian Bang [SM05b]) dans le cas d'un bruit blanc, coloré et de matrice de covariance inconnue. D'autre part, la BCRD pour le contexte champ lointain a été calculée par Stoica *et al.* dans [SN89].

Contrairement au champ lointain, la BCR pour les problèmes de localisation de source en champ proche a été peu étudiée. On peut trouver des expressions matricielles pour la BCRS dans [WF93]. Récemment, Grosicki *et al.* [GAMH05] ont étendu les formules matricielles de la BCRS dans le contexte du champ lointain au champ proche. A notre connaissance, aucune expression analytique non matricielle de la BCRS ou de la BCRD n'était disponible dans la littérature. Nous avons calculé et analysé des expressions non matricielles compactes de la BCRD et de la BCRS dans le cas d'une source à bande étroite située en champ proche.

Nous avons considéré une Antenne Linéaire Uniforme (ALU) composée de N ($N > 1$) capteurs avec une distance entre capteurs notée d . L'ALU reçoit un signal émis par une source à bande étroite située dans le champ proche. Par conséquent, le modèle d'observation peut s'écrire comme suit

$$y_n(t) = s(t)e^{j\tau_n} + v_n(t), \quad (2.22)$$

avec $t = 1, \dots, T$ et $n = 0, \dots, N - 1$. $y_n(t)$ et $s(t)$ représentent le signal observé à la sortie

du $n^{\text{ème}}$ capteur et le signal source, respectivement. Le processus aléatoire $v_n(t)$ est un bruit additif et T est le nombre d'observations. Puisque la source est supposée dans le champ proche de l'antenne, le retard temporel τ_n qui représente le temps de propagation du signal de la source au $n^{\text{ème}}$ capteur est donné par [GAMH05]

$$\tau_n = \frac{2\pi r}{\lambda} \left(\sqrt{1 + \frac{n^2 d^2}{r^2} - \frac{2nd \sin \theta}{r}} - 1 \right), \quad (2.23)$$

où λ est la longueur d'onde et $r, \theta \in [0, \pi/2[$ représentent la distance et l'azimut du signal source, respectivement. Si la distance appartient à la région de Fresnel [HB91], c'est-à-dire, si

$$0.62(d^3(N-1)^3/\lambda)^{1/2} < r < 2d^2(N-1)^2/\lambda, \quad (2.24)$$

alors le temps de propagation τ_n peut être approximé par

$$\tau_n = \omega n + \phi n^2 + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right), \quad (2.25)$$

où ω et ϕ sont généralement appelées les angles électriques. Ils s'expriment en fonction des paramètres physiques du problème à l'aide de $\omega = -2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$ et de $\phi = \pi \frac{d^2}{\lambda r} \cos^2(\theta)$. Par conséquent, en utilisant (2.25), le modèle des observations peut s'écrire comme suit

$$y_n(t) = s(t)e^{j(\omega n + \phi n^2)} + v_n(t). \quad (2.26)$$

De ce fait, le vecteur d'observation peut être exprimé comme suit

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_N(t)]^T = \mathbf{a}(\omega, \phi)s(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2.27)$$

où $\mathbf{v}(t) = [v_1(t) \dots v_N(t)]^T$ et où le $n^{\text{ème}}$ élément du vecteur directionnel $\mathbf{a}(\omega, \phi)$ est donné par $[\mathbf{a}(\omega, \phi)]_n = e^{j(\omega n + \phi n^2)}$ (notons que pour le champ lointain ϕ est supposé égal à zéro).

Les hypothèses suivantes seront utilisées :

- On admet que le bruit est un processus complexe circulaire blanc Gaussien aléatoire avec une moyenne nulle et une variance inconnue σ^2 ,
- Le bruit est supposé décorélé temporellement et spatialement,

La fonction de densité de probabilité conjointe des observations $\chi = [\mathbf{y}^T(1) \dots \mathbf{y}^T(T)]^T$ pour un vecteur de paramètres inconnus ξ donné peut s'écrire comme suit :

$$p(\chi|\xi) = \frac{1}{\pi^{NT} \det(\Sigma)} e^{-(\chi - \mu)^H \Sigma^{-1} (\chi - \mu)}, \quad (2.28)$$

où Σ et μ représentent la matrice de covariance et la moyenne de χ , respectivement.

Après calcul et inversion de la matrice d'information de Fisher (voir [EBRM10]), nous avons obtenu les résultats suivants :

- BCR pour le modèle déterministe

Premièrement, pour le modèle déterministe avec $s(t) = \alpha(t)e^{j(2\pi f_0 t + \psi(t))}$ qui représente le signal émis pour une fréquence porteuse valant f_0 et $\alpha(t)$, $\psi(t)$ représentent l'amplitude réelle et la phase de la source, respectivement. Notons $\psi = [\psi(1) \dots \psi(T)]^T$ et $\alpha = [\alpha(1) \dots \alpha(T)]^T$ où les vecteurs de paramètres inconnus sont $\xi = [\omega \ \phi \ \psi^T \ \alpha^T \ \sigma^2]^T$ (si on s'intéresse aux angles électriques) ou $\kappa = [\theta \ r \ \psi^T \ \alpha^T \ \sigma^2]^T$ (si on s'intéresse aux paramètres physiques). Ainsi on

aura $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$ et $\mathbf{\mu} = [s(1)\mathbf{a}^T(\omega, \phi) \dots s(T)\mathbf{a}^T(\omega, \phi)]^T$. Les expressions non matricielles de la matrice $\mathbf{BCRD}(\boldsymbol{\xi})$ correspondant aux angles électriques, pour $N \geq 3$, sont données par

$$\text{BCRD}(\omega) = \frac{6(2N-1)(8N-11)}{D_{RSB}(N^2-1)N(N^2-4)}, \quad (2.29)$$

$$\text{BCRD}(\phi) = \frac{90}{D_{RSB}(N^2-1)N(N^2-4)}, \quad (2.30)$$

$$\text{BCRD}(\psi(t)) = \frac{1}{2\alpha^2(t)D_{RSB}} \frac{N^4 - 31N^3 + 48N^2 - 26N + 2}{N^2(N+1)(N^2-4)}, \quad \forall t \quad (2.31)$$

$$\text{BCRD}(\alpha(t)) = \frac{\sigma^2}{2N} \quad \forall t, \quad (2.32)$$

et

$$\text{BCRD}(\sigma^2) = \frac{\sigma^4}{NT}. \quad (2.33)$$

Et les termes croisés sont donnés par $\text{BCRD}(\omega, \phi) = \text{BCRD}(\phi, \omega) = -\frac{90}{D_{RSB}N(N^2-4)(N+1)}$.

Les expressions non matricielles de la BCRD pour une source située dans le champ proche, avec $N \geq 3$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, sont données par

$$\text{BCRD}(\theta) = \frac{3\lambda^2}{2D_{RSB}d^2\pi^2 \cos^2(\theta)} \frac{(8N-11)(2N-1)}{(N^2-1)N(N^2-4)}, \quad (2.34)$$

$$\text{BCRD}(r) = \frac{6r^2\lambda^2}{D_{RSB}\pi^2 d^4} \times \frac{15r^2 + 30drp_1(N)\sin(\theta) + d^2p_2(N)\sin^2(\theta)}{p_3(N)\cos^4(\theta)},$$

où $p_1(N) = N-1$, $p_2(N) = (8N-11)(2N-1)$ et $p_3(N) = N(N^2-1)(N^2-4)$.

Notons que, bien sûr, $\mathbf{BCRD}(\psi)$, $\mathbf{BCRD}(\alpha)$ et $\text{BCRD}(\sigma^2)$ restent inchangées. Et les termes croisés entre θ et r s'expriment désormais comme suit

$$\text{BCRD}(\theta, r) = \text{BCRD}(r, \theta) = -\frac{3\lambda^2 r}{D_{RSB}\pi^2 d^3} \frac{15rp_1(N) + dp_2(N)\sin(\theta)}{p_3(N)\cos^3(\theta)}. \quad (2.35)$$

– BCR pour le modèle aléatoire

Concernant le calcul de la BCRS pour des signaux sources supposés complexes circulaires Gaussiens (de moyenne nulle et de variance σ_s^2) indépendants du bruit, les vecteurs de paramètres inconnus sont donnés par $\boldsymbol{\rho} = [\omega \ \phi \ \sigma_s^2 \ \sigma^2]^T$ (si on s'intéresse aux angles électriques) ou $\boldsymbol{\theta} = [\theta \ r \ \sigma_s^2 \ \sigma^2]^T$ (si on s'intéresse aux paramètres physiques). De ce fait, $\mathbf{y}(t)|\boldsymbol{\rho} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}) \ \forall t = 1, \dots, T$, où la matrice de covariance est donnée par $\mathbf{\Sigma} = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega, \phi) \mathbf{a}^H(\omega, \phi) + \sigma^2 \mathbf{I}_N$. Les expressions non matricielles de $\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\rho})$ correspondant aux angles électriques, pour $N \geq 3$, sont données par

$$\text{BCRS}(\omega) = \left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{6(2N-1)(8N-11)}{S_{RSB} T(N^2-1)N(N^2-4)}, \quad (2.36)$$

$$\text{BCRS}(\phi) = \left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{90}{S_{RSB} T(N^2-1)N(N^2-4)}. \quad (2.37)$$

De plus, les termes croisés sont donnés par

$$[\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\rho})]_{1,2} = [\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\rho})]_{2,1} = -\left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{90}{S_{RSB} TN(N^2-4)(N+1)}. \quad (2.38)$$

Les expressions non matricielles de $\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\vartheta})$ pour une source située dans le champ proche, avec $N \geq 3$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, sont données par

$$\text{BCRS}(\theta) = \left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{3\lambda^2}{2S_{RSB} T d^2 \pi^2 \cos^2(\theta)} \frac{(8N-11)(2N-1)}{N(N^2-1)(N^2-4)}, \quad (2.39)$$

$$\text{BCRS}(r) = \left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{6r^2 \lambda^2}{S_{RSB} T \pi^2 d^4} \frac{15r^2 + 30dr(N-1)\sin(\theta) + d^2(8N-11)(2N-1)\sin^2(\theta)}{N^2(N^2-1)(N^2-4)\cos^4(\theta)}. \quad (2.40)$$

Les termes croisés entre θ et r sont donnés par

$$\begin{aligned} [\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\vartheta})]_{1,2} &= [\mathbf{BCRS}(\boldsymbol{\vartheta})]_{2,1} \\ &= - \left(1 + \frac{1}{S_{RSB} N}\right) \frac{3\lambda^2 r}{S_{RSB} T \pi^2 d^3} \frac{15r(N-1) + d(8N-11)(2N-1)\sin(\theta)}{N(N^2-1)(N^2-4)\cos^3(\theta)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ces expressions analytiques nous ont permis de remarquer que :

- La BCRD et la BCRS sont invariantes par rapport à la phase du signal source.
- Comme dans le cas du champ lointain, $\text{BCRD}(\theta)$ et $\text{BCRS}(\theta)$ ne dépendent que de l'azimut selon $1/\cos^2(\theta)$. De ce fait, l'ALU n'est pas une antenne isotrope pour une source située en champ proche.
- $\text{BCRD}(r)$ et $\text{BCRS}(r)$ dépendent à la fois de l'azimut et de la distance. Pour $\lambda, r \propto d$, la dépendance par rapport à la distance est quant à elle de $O(r^2)$, ce qui veut dire que l'estimation s'améliore quand la source se rapproche de l'antenne (cependant il faut respecter la contrainte de la région de Fresnel 2.24). La dépendance en la distance par rapport à l'azimut est $1/\cos^4(\theta)$. Si θ est proche de $\pi/2$, $\text{BCR}(r)$ tend vers l'infini et cette convergence est plus rapide que celle de $\text{BCR}(\theta)$.
- Pour un nombre suffisant de capteurs, $\text{BCRD}(\theta)$, $\text{BCRD}(r)$, $\text{BCRS}(\theta)$ et $\text{BCRS}(r)$ sont de l'ordre de $O(1/N^3)$.
- Pour $\lambda \propto d$, $\text{BCRD}(\theta)$ et $\text{BCRS}(\theta)$ sont indépendantes de la fréquence porteuse f_0 . Ce qui n'est pas le cas de $\text{BCRD}(r)$ et de $\text{BCRS}(r)$.
- Pour un grand nombre de capteurs et une distance entre capteurs fixée, $\text{BCRD}(\theta)$ et $\text{BCRS}(\theta)$ exprimées dans le champ proche tendent vers les BCR exprimées dans le champ lointain [SN90b]. Cette dernière remarque est en adéquation avec l'intuition car, du fait de la contrainte (2.24) un grand nombre de capteurs implique une grande distance entre la source et l'antenne (tout en restant dans le région de Fresnel.)
- Les expressions de la BCRD montrent que les paramètres physiques d'intérêt sont fortement couplés vu que $\text{BCRD}(\theta, r)$ est $O(1/N^3)$ comme $\text{BCRD}(\theta)$ et $\text{BCRD}(r)$. Les mêmes remarques s'appliquent pour la BCRS.

2.3.1.1.2 Processus non-gaussien Dans le contexte de la detection radar, l'estimation de la matrice de covariance du clutter est la pierre angulaire permettant de réaliser des detecteurs optimaux. Bien que le cas d'un clutter gaussien ait été intensivement étudié, les nouvelles avancées technologiques ont montré que les modèles de clutter non-gaussien doivent être pris en compte. Parmi ces modèles, les vecteurs aléatoires sphériquement invariants sont particulièrement intéressants puisqu'ils incluent le modèle de clutter K-distribué connu pour être à même de bien représenter les données réelles. Plus précisément, l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de la matrice de covariance d'un clutter K-distribué a déjà été proposé dans la littérature. Avec Frédéric Pascal, SONDRRA/Supélec, nous avons proposé une analyse statistique

de cet estimateur au travers de sa consistance et son caractère non-biaisé pour un nombre fini d'échantillons. Afin, de montrer l'efficacité de cet estimateur, nous avons également calculé une forme analytique de la borne de Cramér-Rao. Voir l'**annexe D** pour les détails.

2.3.1.2 Applications indirectes

2.3.1.2.1 Convergence de l'algorithme EM Avec Cédric Herzet, INRIA, nous avons étudié la vitesse de convergence moyenne de l'algorithme EM. Nous avons montré que le comportement asymptotique (en termes de nombre d'observations) de cet algorithme peut être décrit en fonction des bornes de Cramér-Rao associées aux jeux de données complètes et incomplètes et que la borne de Cramér-Rao associée aux données complètes n'est autre que la borne de Cramér-Rao modifiée. Les détails sont donnés en **annexe A**.

2.3.1.2.2 Seuils de résolution limites Le seuil statistique de résolution limite (SRL), aussi nommé pouvoir séparateur, c'est-à-dire, la distance minimale entre deux signaux permettant une correcte séparation/estimation des paramètres d'intérêt, est un sujet d'une importance croissante et qui vise diverses applications comme le radar, le sonar, le traitement d'images, l'analyse spectrale, etc. En traitement d'antenne, pour la formation de voies, le seuil de résolution ne dépend que de l'ouverture de l'antenne [Ste76]. Ainsi, on peut citer la résolution de Fourier et de Rayleigh données respectivement par la largeur du lobe principal de la fonction de directivité et sa largeur à 3 dB [Mar98, Abe06], respectivement. Avec la venue des méthodes à haute résolution, les seuils de la résolution définis par Fourier et Rayleigh ont été repoussés, d'où la nécessité d'introduire de nouveaux critères du seuil statistique de résolution limite.

Dans la littérature on définit/calcule le SRL principalement selon trois familles de critères [Cox73, KB86, Lee92, Lee94, SD95, Dil98, Smi98, SM05a, Smi05, DA06, LN07, FLV08, AW08, AD08, KG09, KBRM11b, KBRM11a, VEB⁺11, EBRM11a, EBRM11b] :

1. La première famille est basée sur le pseudo-spectre des algorithmes d'estimation (voir figure 2.4.) Si nous supposons, par exemple, que deux signaux sont paramétrés par les directions d'arrivée (DDA) θ_1 et θ_2 , alors, le critère de Cox [Cox73] stipule que *les deux signaux sont résolus si les moyennes des valeurs du pseudo-spectre aux points θ_1 et θ_2 sont inférieures à la moyenne de la valeur du pseudo-spectre au point $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$* . Un second critère, basé lui aussi sur le pseudo-spectre, a été proposé par Sharman et Durrani [SD95] et stipule que *les deux signaux sont résolus si la dérivée seconde de la moyenne du pseudo-spectre au point $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ est négative*.

On remarque bien que cette famille de critères est spécifique aux algorithmes utilisés. Pour plus d'exemples, le lecteur pourra se référer aux références suivantes [Cox73, KB86, SD95, AD08]. Dans la suite, nous présenterons deux autres familles de critères valables pour tout type d'algorithme.

2. La seconde famille est basée sur un test d'hypothèses binaires [SM05a, LN07, AW08]. L'idée principale consiste à utiliser ces tests d'hypothèses pour décider si un ou deux signaux sont présents. Le but est alors de relier la distance minimale (entre les deux signaux pour un rapport signal à bruit donné) à la probabilité de fausse alarme P_{fa} et/ou à la probabilité de détection P_d . Ainsi, dans [SM05a], Sharman et Milanfar ont considéré le problème du calcul du SRL en analyse spectrale en utilisant le test du rapport de vraisemblance (TRV). Par conséquent, les auteurs ont calculé l'expression du SRL pour une P_{fa} et une P_d données. Dans [LN07], Liu et Nehorai ont défini le seuil de résolution limite angulaire (c'est-à-dire, le SRL par rapport aux DDA) en utilisant le TRV dans sa forme asymptotique en terme de nombre d'observations. A cet effet, les auteurs ont relié l'expression du SRL à la borne

de Cramér-Rao. Enfin, on peut trouver dans [AW08] le calcul du SRL par rapport aux fréquences pour des sinusoïdes complexes en utilisant, cette fois ci, l'approche Bayésienne.

3. La troisième famille est basée sur la précision d'estimation des paramètres en terme de variance [Lee92, LL93, Lee94, Smi98, Dil98, Smi05, EBRM10, KBRM11b, KBRM11a]. Puisque la BCR est une borne inférieure de l'erreur quadratique moyenne, elle exprime ainsi les performances ultimes en terme d'estimation paramétrique. Par conséquent, elle peut être utilisée pour définir/obtenir le SRL. De ce fait, on distingue deux critères *intuitifs* du SRL basés sur la BCR :

- i) Le premier critère a été introduit par Lee en 1992 [Lee92]. Dans un contexte de traitement d'antenne, il stipule que *deux signaux sont correctement résolus par rapport aux DDA, si l'écart type maximal est inférieur à au moins deux fois la différence entre θ_1 et θ_2* . Ainsi, et sous certaines conditions de régularité [LC03b], les écarts types $\sigma_{\hat{\theta}_1}$ et $\sigma_{\hat{\theta}_2}$, d'un estimateur non biaisé $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]^T$ peuvent être approximés par $\sqrt{\text{BCR}(\theta_1)}$ et $\sqrt{\text{BCR}(\theta_2)}$, respectivement. Par conséquent, le SRL est, selon le critère de Lee, égal à $2\max\left\{\sqrt{\text{BCR}(\theta_1)}, \sqrt{\text{BCR}(\theta_2)}\right\}$. Pour des applications se basant sur le critère de Lee, le lecteur pourra se référer à [Lee92, Lee94, Dil98].
- ii) On peut noter que le couplage entre les paramètres est ignoré par ce dernier critère (c'est-à-dire, absence du terme croisé dans la matrice de Cramér-Rao $\text{BCR}(\theta_1, \theta_2)$). C'est pour cela que Smith [Smi98, Smi05] a introduit un critère qui tient compte de ce couplage entre les paramètres d'intérêt. Ce critère est donné comme suit : *deux signaux sont résolus par rapport aux DDA si la différence entre les DDA, δ , est plus grande que l'écart type de la différence de ces DDA*. L'écart type peut être approximé par la BCR (sous certaines conditions de régularité.) Par conséquent, le SRL au sens de Smith peut être défini comme étant $\delta = |\theta_1 - \theta_2|$ pour lequel l'inégalité suivante

$$\delta < \sqrt{\text{BCR}(\delta)} \quad (2.42)$$

est atteinte. Par conséquent, le SRL est donné par la solution de l'équation suivante

$$\delta^2 = \text{BCR}(\delta) . \quad (2.43)$$

Dans [Smi98, Smi05], Smith a calculé le SRL (en terme des DDA) pour deux signaux modélisés par des pôles complexes. Dans [DA06], Delmas et Abeida ont calculé le SRL en terme de DDA suivant le critère de Smith pour des signaux sources discrets modulés en BPSK (*binary phase-shift keying*), QPSK (*quadrature phase-shift keying*) et MSK (*minimum-shift keying*.)

On notera que le SRL basé sur la précision de l'estimation (c'est-à-dire, basé sur la BCR) est un concept intuitif. Dans [LN07], les auteurs ont relié le SRL basé sur un test d'hypothèses à celui basé sur la BCR (plus particulièrement celui basé sur le critère de Smith). Ainsi, et pour un grand nombre d'observations, les auteurs ont montré que le SRL basé sur un test d'hypothèses binaire peut être écrit comme la solution de l'équation suivante [LN07, eq. 9]

$$\delta^2 = \lambda \text{BCR}(\delta) , \quad (2.44)$$

où λ est un facteur de translation exprimé en fonction de P_{fa} et P_d .

A noter qu'il existe deux autres critères moins utilisés dans la littérature. Le premier est basé sur le critère d'information d'Akaike (CIA). Dans [SSS95] les auteurs ont relié la fonction

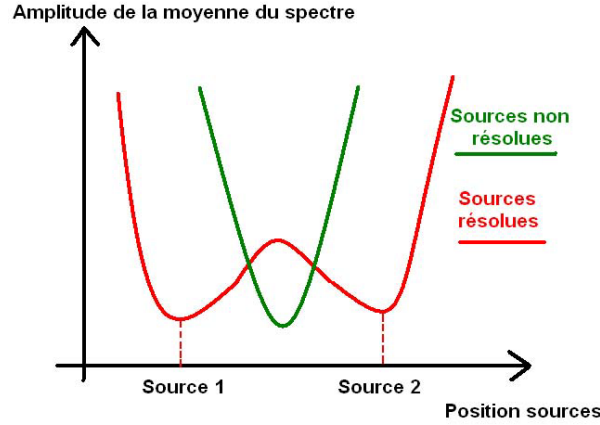


FIGURE 2.4 – Illustration du cas *sources résolues* et *sources non résolues* à l'aide d'un pseudo-spectre d'algorithme d'estimation.

relative au CIA à la séparation δ . Un autre critère est basé sur l'application du lemme de Stein permettant ainsi de relier la distance de Kullback-Leibler à la séparation δ [VEB⁺11]

Dans le cadre de la thèse de Mohammed Nabil El Korso, nous avons caractérisé le SRL pour la localisation de sources polarisées et pour la localisation de sources en présence des interférences qui sont des applications pour lesquelles aucun résultat n'était disponible dans la littérature. Lors du calcul du SRL dans le contexte champ proche (c'est-à-dire, deux paramètres d'intérêt par source qui sont la distance et la DDA), nous avons constaté que tous les critères susmentionnés ont été introduits dans le cas d'un seul paramètre d'intérêt par signal. Toutefois, dans de nombreux problèmes d'estimation, les signaux sont paramétrés par plus d'un paramètre d'intérêt par signal. On peut citer les problèmes liés au cas Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) [God97, THL⁺01, GS05, STWT06, NS09] ou dans le cadre général des problèmes d'harmoniques multidimensionnelles [JStB01, MSPM04], etc. A cet effet nous avons proposé un critère du SRL pour des signaux multidimensionnels, nommé SRLM (voir **annexe F**). Ainsi que le calcul du SRLM pour les modèles suivants : modèle harmonique multidimensionnel, le radar MIMO mais aussi la localisation de sources en champ proche.

Nous avons étudié deux exemples applicatifs du calcul du SRL pour des signaux monodimensionnels, c'est-à-dire, des signaux comportant un seul paramètre d'intérêt par source.

- Seuil de résolution limite pour la localisation de sources polarisées

Considérons une antenne linéaire uniforme de type COLD (cocentered orthogonal loop and dipole array) notée ALU-COLD composée de N capteurs ; où chaque capteur est formé d'une boucle et d'un dipôle. Cette ALU-COLD reçoit deux signaux provenant de deux sources émettrices. Le signal observé par le $\ell^{\text{ème}}$ capteur à la $t^{\text{ème}}$ observation est donné par [LC91, LSZ96]

$$\mathbf{y}_\ell(t) = \begin{bmatrix} y_b(t) & y_d(t) \end{bmatrix}^T = \sum_{m=1}^2 \alpha_m(t) \mathbf{u}_m e^{j\ell\omega_m} + \mathbf{v}_\ell(t), \quad (2.45)$$

où $\ell = 0 \dots N-1$ et $t = 1 \dots T$ avec T représentant le nombre d'observations. Notons $\omega_m = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta_m)$ l'angle électrique où θ_m , d et λ représentent l'azimut de la $m^{\text{ème}}$ source, l'espacement inter-capteur et la longueur d'onde, respectivement. Les deux signaux sources sont modélisés par $\alpha_m(t) = a_m e^{j(2\pi f_0 t + \phi_m(t))}$ où a_m est l'amplitude du signal (non nulle), $\phi_m(t)$ la phase du signal et f_0 la fréquence porteuse du signal. Le bruit additif sera noté $\mathbf{v}_\ell(t) = \begin{bmatrix} v_b(t) & v_d(t) \end{bmatrix}^T$. Le vecteur

de polarisation \mathbf{u}_m est donné par

$$\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \frac{2j\pi A_{sl}}{\lambda} \cos(\rho_m) \\ -L_{sd} \sin(\rho_m) e^{j\psi_m} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

où $\rho_m \in [0, \pi/2]$ et $\psi_m \in [-\pi, \pi]$ sont les paramètres de polarisation.

Par conséquent, la forme vectorielle du modèle des observations à la $t^{\text{ème}}$ observation est donnée par :

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_0^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_{N-1}^T(t)]^T = \sum_{m=1}^2 \mathbf{A}_m(t) \mathbf{a}_m + [\mathbf{v}_0^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{v}_{N-1}^T(t)]^T, \quad (2.47)$$

où $\mathbf{A}_m(t) = \mathbf{I}_L \otimes (\alpha_m(t) \mathbf{u}_m)$. Le vecteur directionnel est défini par $\mathbf{a}_m = [1 \quad e^{j\omega_m} \quad \dots \quad e^{j(N-1)\omega_m}]^T$. Dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- Le bruit est supposé complexe circulaire blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance inconnue σ^2 .
- Les signaux sources sont supposés connus et déterministes [LC93, LHSV95, CM97]. Le vecteur de paramètres inconnus est alors donné par $\boldsymbol{\xi} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \sigma^2]^T$.
- Afin de simplifier les calculs, et sans perte de généralité, on supposera $L_{sd} = \frac{2\pi A_{sl}}{\lambda} = 1$ [LSZ96] et $w_1 > w_2$.

Après calcul puis inversion de la MIF, on trouve :

$$\text{BCR}(\omega_1) = \frac{\sigma^2}{2N} \frac{a_2^2 \alpha}{a_1^2 a_2^2 \alpha^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 \eta\}}, \quad (2.48)$$

$$\text{BCR}(\omega_2) = \frac{\sigma^2}{2N} \frac{a_1^2 \alpha}{a_1^2 a_2^2 \alpha^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 \eta\}}, \quad (2.49)$$

$$\text{BCR}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{\sigma^2}{2N} \frac{\Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 \eta\}}{a_1^2 a_2^2 \alpha^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 \eta\}}. \quad (2.50)$$

où $\alpha = \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$, $r_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_1^*(t) \alpha_2(t)$ et

$$\eta = \sum_{\ell=0}^{L-1} \ell^2 e^{-j(\omega_1 - \omega_2)\ell} = \sum_{\ell=0}^{L-1} \ell^2 e^{-j \text{sgn}(\omega_1 - \omega_2) \delta_\omega^{(\text{COLD})} \ell}, \quad (2.51)$$

avec $\delta_\omega^{(\text{COLD})} = \omega_1 - \omega_2$.

Notons $\delta_\omega^{(\text{COLD})}$ le SRL associé au modèle (2.47) qui est donné par le critère de Smith [Smi05] comme suit :

$$\delta_\omega^{(\text{COLD})} = \sqrt{\text{BCR}(\delta_\omega^{(\text{COLD})})} \iff f(\delta_\omega^{(\text{COLD})}) = (a_1^2 + a_2^2) \alpha, \quad (2.52)$$

où dans notre cas $f(\delta_\omega^{(\text{COLD})}) = \frac{2}{\sigma^2 T^2} (a_1^2 a_2^2 \alpha^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 \eta\}) \left(\left(\delta_\omega^{(\text{COLD})} \right)^2 + 2\text{BCR}(\omega_1, \omega_2) \right)$ et

$$\text{BCR}(\delta_\omega^{(\text{COLD})}) = \text{BCR}(\omega_1) + \text{BCR}(\omega_2) - 2\text{BCR}(\omega_1, \omega_2). \quad (2.53)$$

Par conséquent, en utilisant (2.48-2.50) et après calcul on obtient :

- i) Le SRL, solution de l'équation implicite (2.52), pour des signaux sources orthogonaux (c'est-à-dire, $r_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_1^*(t) \alpha_2(t) = 0$ [LC93]), est donné par

$$\delta_\omega^{(\text{COLD-O})} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T\alpha}} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 a_2^2}}. \quad (2.54)$$

Enfin, dans le cas de deux signaux sources ayant la même puissance (c'est-à-dire, $a_1 = a_2 = a$), on obtient

$$\delta_{\omega}^{(\text{COLD-O})} = \frac{1}{\sqrt{T\alpha\text{RSB}}}, \quad (2.55)$$

où $\text{RSB} = a^2/\sigma^2$. Ce résultat est qualitativement équivalent à celui trouvé dans [DA06, AW08] pour des sources non polarisées.

- ii) Le SRL, solution implicite de l'équation (2.52) pour des signaux sources non-orthogonaux (c'est-à-dire, $r_T \neq 0$), est donné par :

$$\delta_{\omega}^{(\text{COLD})} = \alpha \sqrt{\frac{a_1^2 a_2^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}{2\beta \Im\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2 \beta \Im\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} ((a_1^2 + a_2^2) + 2\Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\})}{\alpha T (\Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} - a_1^2 a_2^2)^2}} \right), \quad (2.56)$$

où $\beta = \sum_{\ell=0}^{N-1} \ell^3 = \frac{1}{4}(N-1)^2 N^2$. Pour un grand nombre d'observations (voir, Fig. 2.5), on peut exprimer le SRL par

$$\delta_{\omega}^{(\text{COLD})} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T\alpha}} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + 2\Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}{a_1^2 a_2^2 - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}}. \quad (2.57)$$

Remarquons, que dans ce cas, le SRL est fonction des paramètres de polarisation. De plus, dans le cas de signaux sources ayant la même puissance, on obtient :

$$\delta_{\omega}^{(\text{COLD})} = \frac{1}{\sqrt{T\alpha\text{RSB}}} \sqrt{\frac{1 + \Re\{\tilde{r}_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}{1 - \Re\{\tilde{r}_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}}}, \quad (2.58)$$

où $\tilde{r}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e^{j(\phi_2(t) - \phi_1(t))}$.

Nous avons comparé le SRL pour des sources polarisées à celui des sources non-polarisées. et obtenu le SRL pour des sources non-polarisées :

$$\delta_{\omega}^{(\text{ALU})} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T\alpha}} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + 2\Re\{r_T\}}{a_1^2 a_2^2 - \Re\{r_T\}}}. \quad (2.59)$$

- i) On remarque d'après (2.54) et (2.59) que le SRL pour des signaux sources orthogonaux (c'est-à-dire $r_T = 0$ [LC93]) et polarisées est égale au SRL pour des signaux sources orthogonaux non-polarisées. Par conséquent, la polarisation n'apporte aucune amélioration du SRL pour des signaux sources orthogonaux.
- ii) Intéressons nous maintenant aux signaux sources non orthogonaux. De (2.57) et (2.59), on peut vérifier que

$$\delta_{\omega}^{(\text{COLD})} \leq \delta_{\omega}^{(\text{ALU})} \quad \text{ssi} \quad \Re\{r_T\} \geq \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}. \quad (2.60)$$

De plus, comme $\Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} = \Re\{r_T\} \Re\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} - \Im\{r_T\} \Im\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}$ et $\Re\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} \leq 1$, la condition (2.60) est satisfaite pour $\Im\{r_T\} = 0$ et/ou pour $\Im\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} = 0$. Par conséquent, $\delta_{\omega}^{(\text{COLD})} < \delta_{\omega}^{(\text{ALU})}$ pour les trois cas suivants :

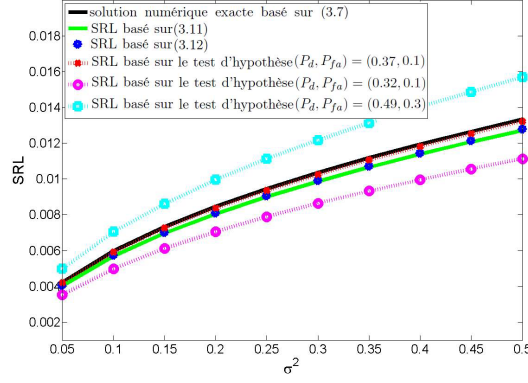


FIGURE 2.5 – Le SRL en fonction de σ^2 pour $T = 100$ observations : Le SRL basé sur l'équation (2.56) et (2.57) est sensiblement égal à la solution numérique exacte basée sur (2.52). Ceci valide nos expressions du SRL. De plus, on note que, par exemple, pour $P_d = 0.37$ et $P_{fa} = 0.1$, le SRL basé sur le critère de Smith est sensiblement égal au SRL calculé en utilisant le test d'hypothèse (voir **Annexe B.1**). Les courbes correspondant à $(P_d, P_{fa}) = (0.49, 0.3)$ et $(P_d, P_{fa}) = (0.32, 0.1)$, nous montrent l'influence du facteur de translation sur le SRL.

- C1.** si les signaux sources sont réels et positifs, c'est-à-dire, $\Im\{r_T\} = 0$ ou à phase commune, c'est-à-dire, $\phi_1(t) = \phi_2(t), \forall t$.
- C2.** si $\psi_1 = \psi_2$, c'est-à-dire, $\Im\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} = 0$.
- C3.** si $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 = 0$, c'est-à-dire, $\Im\{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\} = 0$.

Les conditions **C1.**, **C2.** et **C3.** sont des conditions suffisantes pour avoir $\delta_\omega^{(\text{COLD})} < \delta_\omega^{(\text{ALU})}$. Afin d'étudier les autres cas, on a tracé dans la Fig. 2.6 la variable $D(r_L, \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2) = \Re\{r_T\} - \Re\{r_T \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2\}$ en fonction des paramètres de polarisation ρ et ψ . On constate que si $D > 0$ alors $\delta_\omega^{(\text{COLD})} < \delta_\omega^{(\text{ALU})}$. La Fig. 2.6 montre qu'en général $\delta_\omega^{(\text{COLD})} < \delta_\omega^{(\text{ALU})}$ et que $\delta_\omega^{(\text{COLD})} > \delta_\omega^{(\text{ALU})}$ seulement pour une petite région (celle qui correspond à la partie inférieure délimitée par le plan horizontal.) Cela signifie, que généralement, le SRL est amélioré grâce aux paramètres de polarisation pour des signaux sources non-orthogonaux.

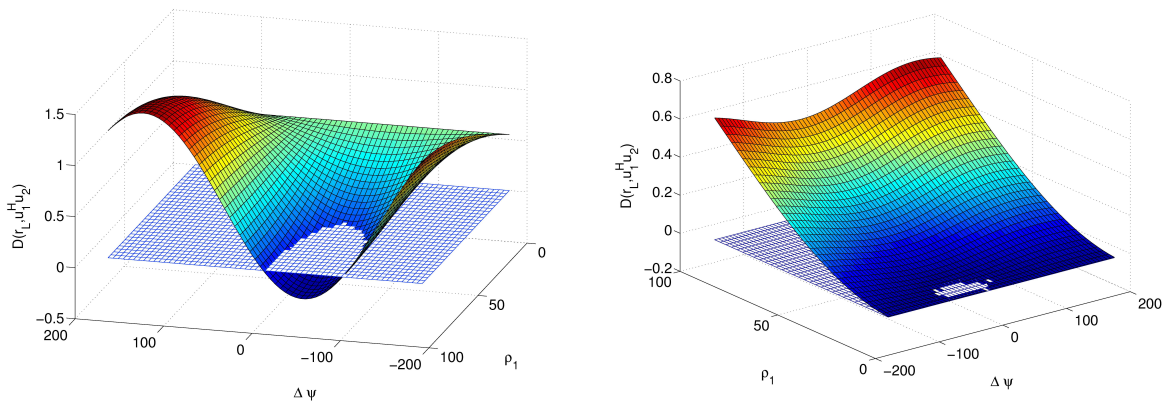


FIGURE 2.6 – $D(r_L, \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2)$ en fonction des paramètres de polarisation ρ et ψ ; $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $r_T = \frac{1+i}{20}$ avec $N = 20$. (à gauche) $\rho_2 = 85$ deg et (à droite) $\rho_2 = 5$ deg.

- Seuil de résolution limite pour des sources en présence d'interférences

Contrairement aux précédents travaux sur le SRL [SM04, SM05a, LN07, AW08], dans le contexte de la localisation de source en champs lointain, nous considérons un modèle plus riche incluant la présence de sources interférences. En effet, nous considérons le problème du calcul du SRL pour deux sources d'intérêt (notées \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2) noyées dans un sous-espace des interférences engendré par des sources de nuisance (voir, Fig. 2.7).

Considérons une antenne linéaire non uniforme (ALNU) avec N capteurs, qui reçoit un signal émis par M sources se situant dans le champ lointain $\{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$ (M étant supposé connu ou précédemment estimé [Van68]). Le signal observé à la $t^{\text{ème}}$ observation par rapport au $n^{\text{ème}}$ capteur est donné par [KV96]

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t) \exp(j\omega_m d_n) + v_n(t), \quad t = 1, \dots, T, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (2.61)$$

où T représente le nombre d'observations, $\omega_m = -2\pi \sin(\theta_m)/\nu$ le paramètre d'intérêt de la $m^{\text{ème}}$ source avec θ_m et ν qui représentent l'angle d'arrivée et la longueur d'onde. Dans la suite, on notera d_n la distance entre le premier capteur et le $n^{\text{ème}}$ capteur. Le bruit additif $v_n(t)$ est supposé complexe circulaire Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . La forme vectorielle des observations à la $t^{\text{ème}}$ observation est donnée par

$$\mathbf{y}(t) = [y_0(t) \quad \dots \quad y_{N-1}(t)]^T = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_M] \check{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2.62)$$

où $\mathbf{v}(t) = [v_0(t) \dots v_{N-1}(t)]^T$, $\check{\mathbf{s}}(t) = [s_1(t) \dots s_M(t)]^T$ et $[\mathbf{a}_m]_{n+1} = \exp(j\omega_m d_n)$, $m = 1, 2, \dots, M$. Par conséquent, le vecteur des observations complet est donné par

$$\mathbf{y} \triangleq [\mathbf{y}^T(1) \quad \mathbf{y}^T(2) \quad \dots \quad \mathbf{y}^T(T)]^T. \quad (2.63)$$

Dans la suite nous avons calculé le SRL, δ , dans le contexte de la localisation de sources en présence des interférences (voir, Fig. 2.7). A cet effet, nous supposons que :

- Les deux sources d'intérêt (SDI) sont notées \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 (avec $\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2$). Par conséquent, le SRL (c'est-à-dire, la séparation) est défini par $\delta \triangleq \omega_2 - \omega_1$.
- Le sous-espace des interférences (SI) [BS94] est représenté par les $M-2$ sources restantes $\{\mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_M\}$. Chaque paire de sources est considérée comme largement espacée. Une condition suffisante est que la séparation minimale sur l'ensemble de la combinaison des paires de sources des interférences, notée Δ_ω , doit vérifier $\Delta_\omega > \delta$.

Pour calculer le SRL nous utilisons le critère basé sur le test d'hypothèses. L'hypothèse \mathcal{H}_0 représente le cas où les deux SDI sont combinées en un seul signal, alors que l'hypothèse \mathcal{H}_1 incarne la situation où les deux SDI sont résolues.

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \delta = 0, \\ \mathcal{H}_1 : & \delta \neq 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

La séparation δ est un paramètre inconnu, donc, il est impossible de concevoir un test de détection du type Neyman-Pearson. L'alternative la plus utilisée en traitement du signal est alors l'utilisation du test du rapport de vraisemblance généralisé (TRV) [Kay98] dont la statistique est donnée par :

$$G(\mathbf{y}) = \frac{\max_{\delta, \rho_1} p(\mathbf{y}|\delta, \rho_1, \mathcal{H}_1)}{\max_{\rho_0} p(\mathbf{y}|\rho_0, \mathcal{H}_0)} = \frac{p(\mathbf{y}|\hat{\delta}, \hat{\rho}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{y}|\hat{\rho}_0, \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \eta', \quad (2.65)$$

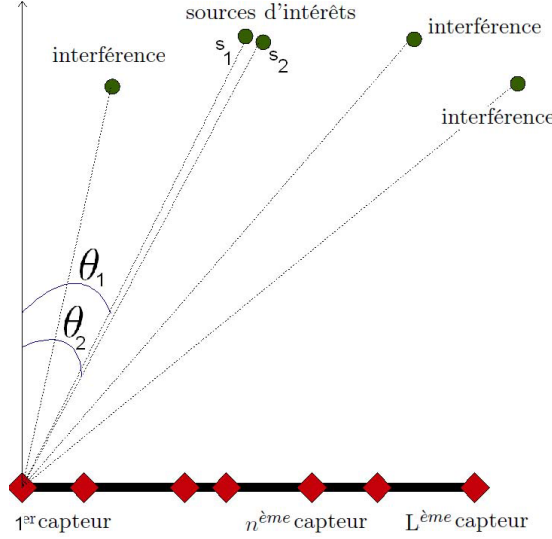


FIGURE 2.7 – Deux SDI proches noyées dans les interférences formées par 3 sources de nuisance.

où $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\rho}_0, \mathcal{H}_0)$ et $p(\mathbf{y}|\delta, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{H}_1)$ représentent la densité de probabilité des observations sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , respectivement, et où η' , $\hat{\delta}$ et $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$ sont le seuil de détection, l'estimation du maximum de vraisemblance de δ sous \mathcal{H}_1 et l'estimation du maximum de vraisemblance du vecteur $\boldsymbol{\rho}_i$ (qui contient tous les paramètres de nuisance) sous $\mathcal{H}_i, i = 0, 1$. Malheureusement, la solution analytique relative au test (2.65) par rapport à δ n'existe pas à cause de la non-linéarité du modèle des observations [SM04, Van68, Van02, OVSN93]. De ce fait, nous proposons d'approximer le modèle d'observation en nous basant sur l'hypothèse que δ est proche de zéro (cette hypothèse est soutenue par le fait que les algorithmes à haute résolution ont, asymptotiquement, un pouvoir de résolution infini [Van02].) Par conséquent, le modèle approché (à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en $\delta = 0$, tel que $\omega_1 = \omega_c - \frac{\delta}{2}$ et $\omega_2 = \omega_c + \frac{\delta}{2}$) s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s}_+ + \delta\mathbf{B}\mathbf{s}_- + \mathbf{e} + \mathbf{v}, \quad (2.66)$$

où $\mathbf{e} = \mathbf{C}\mathbf{s}$. La matrice \mathbf{C} supposée connue ou précédemment estimée [Beh90] est donnée par $\mathbf{C} = [\mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_M]$, $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_3^T \dots \mathbf{s}_M^T]^T$, et

$$\mathbf{s}_+ = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{s}_- = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1, \quad (2.68)$$

avec $\mathbf{s}_i = [s_i(1) \dots s_i(T)]^T$. $\mathbf{d} = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{N-1}]^T$ et \mathbf{a} représente le vecteur directionnel par rapport au paramètre $\omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ supposé connu [LN07] ou précédemment estimé [SM05a] (c'est-à-dire, $[\mathbf{a}]_{n+1} \triangleq \exp(j\omega_c d_n)$, $n = 0, \dots, N-1$). On définit aussi

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}_{(NT) \times T} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{a}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{B} \triangleq \frac{j}{2} \mathbf{I}_T \otimes \dot{\mathbf{a}}, \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{a}} \triangleq \mathbf{a} \odot \mathbf{d}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{A}_m \triangleq \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{a}_m, \quad \text{pour } m = 3, \dots, M. \quad (2.71)$$

Le modèle (2.66) étant linéaire en δ , nous pouvons alors calculer le SRL.

La relation entre le SRL et le RSBI-RSB requis pour résoudre deux SDI pour différents cas (SDI connue ou inconnue, SI connu ou inconnu avec variance du bruit connue ou inconnue) est représentée dans le tableau 2.1 où on a défini $\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{s}_-$ et $\mathbf{D} = [\mathbf{A} \ \mathbf{C}]$ avec le rapport signal à bruit et le rapport signal à bruit plus les interférences défini par $\text{RSB} \triangleq \frac{\sum_{m=1}^2 \|\mathbf{s}_m\|^2}{\sigma^2}$ et $\text{RSBI} \triangleq \frac{\sum_{m=1}^2 \|\mathbf{s}_m\|^2}{\|\mathbf{s}\|^2 + \sigma^2}$, respectivement. δ_i et λ_i , $i = 1, \dots, 4$, représentent le SRL et le facteur de translation pour le $i^{\text{ème}}$ cas, respectivement. La loi du chi2 centrée avec i degrés de liberté est désignée par χ_i^2 et la loi du F centrée avec i_1 et i_2 degrés de liberté est notée F_{i_1, i_2} . Le paramètre de translation λ_1 est estimé numériquement comme solution de $Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{fa}) = Q_{\chi_1^2(\lambda_1)}^{-1}(P_d)$, où $Q_{\chi_1^2}^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $Q_{\chi_1^2}(\cdot)$ qui désigne la surface sous la queue de distribution à droite de la loi χ_1^2 . De même on définit λ_2 , λ_3 et λ_4 comme solution de $Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{fa}) = Q_{\chi_1^2(\lambda_2)}^{-1}(P_d)$, $Q_{\chi_{2T}^2}^{-1}(P_{fa}) = Q_{\chi_{2T}^2(\lambda_3)}^{-1}(P_d)$, et $Q_{F_{2L, 2(N-M)T}}^{-1}(P_{fa}) = Q_{F_{2L, 2(N-M)T}(\lambda_4)}^{-1}(P_d)$, respectivement.

	SDI	SI	Variance du bruit	RSBI pour $M \geq 2$	RSB pour $M = 2$
Cas 1	connue	connu	connue	$\frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{\ \mathbf{s}\ ^2 + \frac{2}{\lambda_1} \delta_1^2 \ \mathbf{w}\ ^2}$	$\lambda_1 \frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{2\delta_1^2 \ \mathbf{w}\ ^2}$
Cas 2	connue	inconnu	connue	$\frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{\ \mathbf{s}\ ^2 + \frac{2}{\lambda_2} \delta_2^2 \ \mathbf{P}_C^\perp \mathbf{w}\ ^2}$	$\lambda_2 \frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{2\delta_2^2 \ \mathbf{w}\ ^2}$
Cas 3	inconnue	inconnu	connue	$\frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{\ \mathbf{s}\ ^2 + \frac{2}{\lambda_3} \delta_3^2 \ \mathbf{P}_D^\perp \mathbf{w}\ ^2}$	$\lambda_3 \frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{2\delta_3^2 \ \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{w}\ ^2}$
Cas 4	inconnue	inconnu	inconnue	$\frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{\ \mathbf{s}\ ^2 + \frac{2}{\lambda_4} \delta_4^2 \ \mathbf{P}_D^\perp \mathbf{w}\ ^2}$	$\lambda_4 \frac{\ \mathbf{s}_1\ ^2 + \ \mathbf{s}_2\ ^2}{2\delta_4^2 \ \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{w}\ ^2}$

TABLE 2.1 – La relation entre le SRL et le RSBI/RSB requis pour résoudre deux SDI.

La Fig. 2.8 représente le RSBI en fonction du SRL pour les différents cas (avec $T = 100$ observations, $\nu = 0.5m$ et $(P_{fa}, P_d) = (0.01, 0.99)$.) Nous remarquons que la différence entre le cas 1 et le cas 2 (10 dB) est due au projecteur orthogonal sur l'espace des interférences \mathbf{P}_C^\perp . De même la différence entre le cas 2 et le cas 3 (25 dB) est due principalement au projecteur orthogonal sur l'espace engendré par la direction centrale ω_c et les interférences présentes dans \mathbf{P}_D^\perp . Enfin, la différence entre le cas 3 et le cas 4 est minime (0.5 dB) et est seulement due au paramètre de translation λ_4 . En conclusion, les différences des RSBI et donc des SRLs sont principalement dues

- à l'effet des sous espaces des interférences ($\langle \mathbf{C} \rangle$ et $\langle \mathbf{D} \rangle$),
- et, avec un degré moindre, au facteur de translation λ_i .

Passons à une analyse numérique du RSBI en fonction du SRL. Le nombre d'observations est fixé à $T = 100$ avec $\nu = 0.5m$ et $(P_{fa}, P_d) = (0.01, 0.99)$. Nous constatons que le RSBI (ou par équivalence le SRL) est affecté par :

- *la connaissance a priori des signaux sources* : en effet, on constate que la connaissance a priori des sources a un fort impact sur le SRL évalué approximativement à 40 dB (voir, Fig. 2.9(à gauche)),
- *les sources des interférences* : de la Fig. 2.9(à droite) nous constatons que les sources des interférences additionnelles n'ont aucun effet si elles sont bien espacées, c'est-à-dire, si $\Delta_\omega \gg \delta$. Par contre si Δ_ω est de l'ordre de δ alors la dégradation du SRL est évaluée à 30 dB.

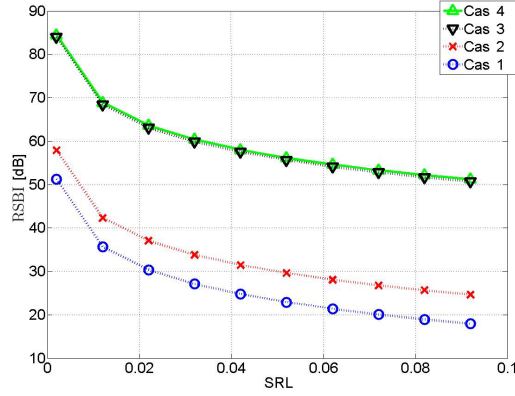


FIGURE 2.8 – RSBI en fonction du SRL pour des sources en champ lointain en présence d'interférences.

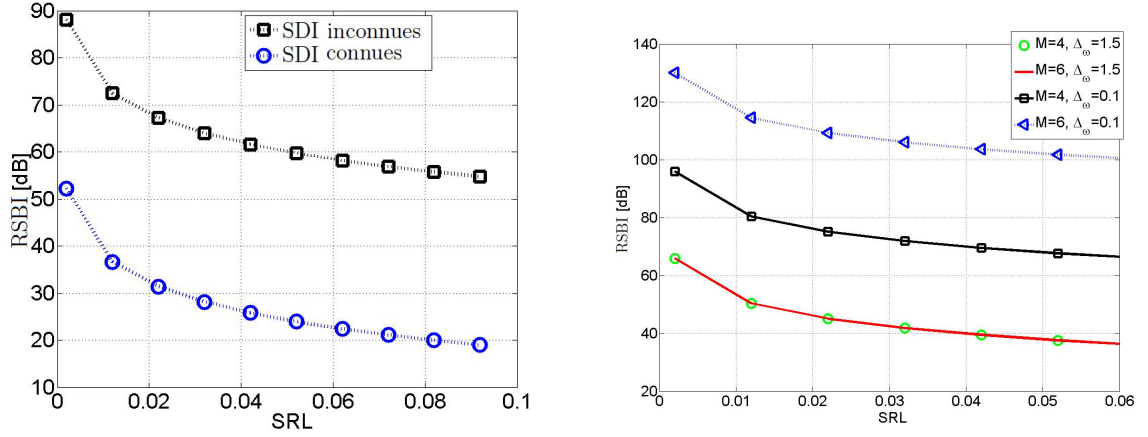


FIGURE 2.9 – (à gauche) Le RSBI requis pour résoudre deux SDI connues/inconnues pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et $M = 4$ avec $\Delta_\omega = 0.75$. (à droite) Le RSBI requis pour résoudre deux SDI inconnues pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et pour différentes valeurs de M et de Δ_ω .

- *L'orthogonalité des sources* améliore aussi le SRL. De la Fig. 2.10 nous constatons que le gain apporté par l'orthogonalité est approximativement égal à 3 dB,
- *la géométrie d'antenne* : dans le tableau 2.2, nous avons présenté certaines géométries d'antenne linéaire pour $N = 4$ capteurs. D'après les simulations de la Fig. 2.11, nous remarquons que l'ouverture d'antenne (c'est-à-dire, l'ajout d'une distance d) produit un gain de 2 dB par rapport au SRL. D'un autre côté, nous constatons que le SRL est sensiblement le même pour différentes géométries d'antennes avec le même nombre de capteur et la même ouverture d'antenne (une différence de seulement 1 dB).
- Seuil de résolution limite pour des signaux multidimensionnels

Après avoir traité le SRL dans le cas monodimensionnel, nous nous sommes intéressés au seuil statistique de résolution limite pour des signaux multidimensionnels (SRLM). Nous rappelons que le seuil de résolution limite basé sur l'approche par la borne de Cramér-Rao n'était introduit que dans le cas monodimensionnel. Pour ce faire, nous avons tout d'abord introduit un critère du SRLM basé sur l'extension du critère de Smith. En deuxième lieu, nous avons montré que

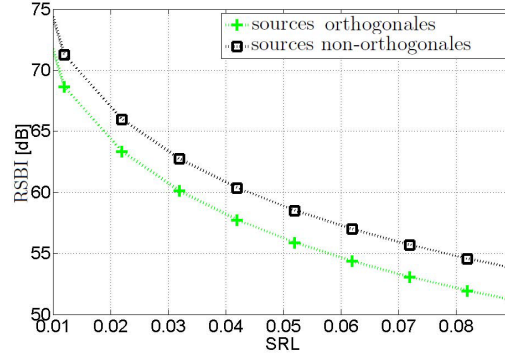


FIGURE 2.10 – Le RSBI requis pour résoudre deux sources du type BPSK inconnues orthogonales/non-orthogonales pour une ALU avec $N = 10$ capteurs, $d = \frac{\nu}{2}$ et $M = 4$.

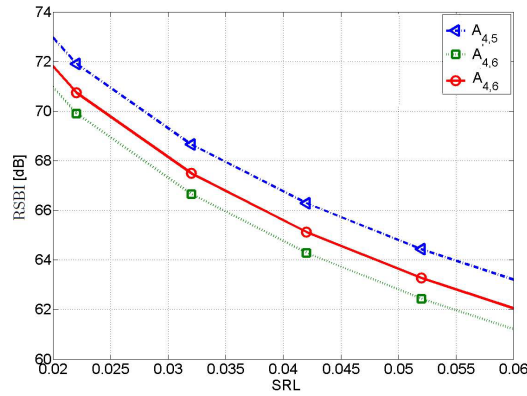


FIGURE 2.11 – Le RSBI requis pour résoudre deux sources connues à l'aide d'une antenne parfaite $A_{4,6}$, une antenne quelconque $A'_{4,6}$ et une antenne à minimum de redondance $A_{4,5}$ décrites au tableau 2.2.

Configuration	Position des capteurs	ouverture	distance redondante	Écart manquant
Antenne parfaite $A_{4,6}$	$[0, 1, 4, 6]$	$6d$	$R = \{\}$	$G = \{\}$
Antenne quelconque $A'_{4,6}$	$[0, 1, 2, 6]$	$6d$	$R = \{1\}$	$G = \{3\}$
Antenne à minimum de redondance $A_{4,5}$	$[0, 1, 2, 5]$	$5d$	$R = \{1\}$	$G = \{\}$

TABLE 2.2 – Caractéristique des différentes géométries d'antennes avec le même nombre de capteurs et des ouvertures différentes. L'antenne parfaite ne contient pas de redondance et aucun écart n'est manquant. La position des capteurs traduit leur coordonnées sur l'axe des abscisses. L'unité, d , correspond à l'écart minimal entre deux capteurs successifs. L'écart entre deux capteurs est donc un multiple de d qui doit être compris entre d et $(L-1)d$. Une distance redondante se traduit par la répétition d'un écart [VH86]. Un écart manquant est dû à l'absence d'un écart entre d et $(L-1)d$ [Mof68]. Une antenne est dite parfaite, si aucun écart n'est manquant et si aucune distance n'est redondante [AGGS96, ASG99, MD01].

le critère proposé est asymptotiquement équivalent (à un facteur de translation près) à un test UPP (uniformément le plus puissant). Enfin, nous avons donné quelques exemples applicatifs (modèle harmonique multidimensionnel, radar MIMO mais aussi le SRLM dans le contexte de la localisation de sources en champ proche).

Dans ce qui suit, nous ne citerons que les principaux résultats. Le lecteur trouvera le détail calculatoire, ainsi qu'une analyse théorique et numérique plus approfondie dans l'**annexe F**.

Dans ce qui suit nous allons utiliser un modèle d'observation généré par deux signaux sources avec P paramètres d'intérêt par signal. Le modèle d'observation est structuré sous forme vectorielle comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_1) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_2) + \mathbf{v}, \quad (2.72)$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ représentent respectivement le vecteur d'observation¹ et le vecteur bruit avec une densité de probabilité connue. Le vecteur de paramètres inconnus est donné par $\boldsymbol{\xi}_m \in \mathbb{R}^{P+q_m}$, $m = 1, 2$ avec $q_1 + q_2 = Q$ où q_m représente la dimension des paramètres de nuisance par signal. Nous supposons aussi que le modèle (2.72) est identifiable et que la matrice d'information de Fisher existe et est inversible. Nous pouvons rassembler tous les paramètres dans un vecteur $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\xi}_1^T \boldsymbol{\xi}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2P+Q}$. En réarrangeant les éléments du vecteur $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, nous obtenons $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\rho}^T]^T$ où $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{2P}$ et $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^Q$ représentent, respectivement, le vecteur des paramètres d'intérêt, et le vecteur des paramètres de nuisance.

- Extension du seuil de résolution limite au cas multidimensionnel

Dans ce qui suit nous allons considérer les hypothèses suivantes :

- **A1.** Les éléments du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ sont de la même nature, c'est-à-dire, les paramètres d'intérêt ont la même unité de mesure (par exemple des fréquences).
- **A2.** Chaque $p^{\text{ème}}$ paramètre, noté $\omega_1^{(p)}$, correspondant à la première source, peut être aussi proche que possible du $p^{\text{ème}}$ paramètre, $\omega_2^{(p)}$, correspondant à la deuxième source, mais jamais égal. Cette hypothèse est fréquemment utilisée pour les signaux multidimensionnels, car l'événement $\omega_1^{(p)} = \omega_2^{(p)}$ est considéré comme ayant une probabilité quasi-nulle [GS05, p74].

Sous ces hypothèses nous proposons le critère du SRLM comme suit

Le SRLM, noté δ , pour le modèle (2.72) est donné comme la solution implicite de l'équation suivante

$$\delta^2 = BCR(\delta) \quad (2.73)$$

avec

$$\delta = \sum_{p=1}^P \delta_p, \quad (2.74)$$

où δ_p représente le SRL dit "local" qui est donné par $\delta_p \triangleq \left| \omega_2^{(p)} - \omega_1^{(p)} \right|$.

Après calcul, nous obtenons le résultat suivant :

Le SRLM pour le modèle (2.72) à P paramètres d'intérêt par signal est donné par δ , qui représente la solution implicite de l'équation suivante :

$$\delta^2 - A_{\text{direct}} - A_{\text{croisé}} = 0,$$

1. Si les observations sont complexes, alors le vecteur d'observation (2.72) sera formé par la concaténation de la partie réelle et de la partie imaginaire des observations complexes. De ce fait, l'étude proposée dans la suite de la section reste valable.

où A_{direct} représente la contribution des termes directs (c'est-à-dire, par rapport au même paramètre p)

$$A_{\text{direct}} = \sum_{p=1}^P \left[\text{BCR}(\omega_1^{(p)}) + \text{BCR}(\omega_2^{(p)}) - 2\text{BCR}(\omega_1^{(p)}, \omega_2^{(p)}) \right], \quad (2.75)$$

et où $A_{\text{croisé}}$ représente la contribution des termes croisés (entre le $p^{\text{ème}}$ paramètre et le $p'^{\text{ème}}$ paramètre) qui est donnée par

$$A_{\text{croisé}} = \sum_{p=1}^P \sum_{\substack{p'=1 \\ p' \neq p}}^P g_p g_{p'} \left(\text{BCR}(\omega_1^{(p)}, \omega_1^{(p')}) + \text{BCR}(\omega_2^{(p)}, \omega_2^{(p')}) - 2\text{BCR}(\omega_1^{(p)}, \omega_2^{(p')}) \right), \quad (2.76)$$

avec $g_p = \text{sgn}(\omega_1^{(p)} - \omega_2^{(p)})$.

Le critère précédemment introduit est un critère intuitif car il est basé sur le critère de Smith. Dans la section suivante, nous allons l'analyser et prouver que ce dernier est asymptotiquement équivalent (à un facteur de translation près) à un test d'hypothèses UPP (uniformément le plus puissant.)

Pour analyser le SRLM nous nous replaçons dans le cadre d'un test d'hypothèses [SM05a, LN07, AW08]. Plus précisément, l'hypothèse \mathcal{H}_0 représente le cas où les deux sources d'intérêt (SDI) sont combinées en un seul signal (c'est-à-dire, $\forall p \in [1 \dots P]$, $\omega_1^{(p)} = \omega_2^{(p)}$), alors que l'hypothèse \mathcal{H}_1 incarne la situation où les deux SDI sont résolues (c'est-à-dire, $\exists p \in [1 \dots P]$, $\omega_1^{(p)} \neq \omega_2^{(p)}$) :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \delta_{\text{detection}} = 0, \\ \mathcal{H}_1 : & \delta_{\text{detection}} > 0, \end{cases} \quad (2.77)$$

où $\delta_{\text{detection}}$ représente la distance entre C_1 et C_2 avec $C_q = \{\omega_q^{(1)}, \omega_q^{(2)}, \dots, \omega_q^{(P)}\}$, $q = 1, 2$. Par conséquent, la mesure naturelle est celle de Minkowski à l'ordre 1 qui est donnée comme suit :

$$\delta_{\text{detection}} \triangleq \sum_{p=1}^P \left| \omega_2^{(p)} - \omega_1^{(p)} \right|. \quad (2.78)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, la distance $\delta_{\text{detection}}$ est un paramètre inconnu, donc, il est impossible de concevoir un test de détection du type Neyman-Pearson. L'alternative la plus utilisée en traitement du signal est alors l'utilisation du test du rapport de vraisemblance (TRV) [Kay98] dont la statistique est donnée par :

$$\begin{aligned} L_G(\mathbf{y}) &= \frac{\max_{\delta_{\text{detection}}, \boldsymbol{\rho}_1} p(\mathbf{y} | \delta_{\text{detection}}, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{H}_1)}{\max_{\boldsymbol{\rho}_0} p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\rho}_0, \mathcal{H}_0)} \\ &= \frac{p(\mathbf{y} | \hat{\delta}_{\text{detection}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{y} | \hat{\boldsymbol{\rho}}_0, \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\gtrsim} \zeta', \end{aligned} \quad (2.79)$$

où $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\rho}_0, \mathcal{H}_0)$ et $p(\mathbf{y} | \delta, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{H}_1)$ représentent la densité de probabilité des observations sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , respectivement, et où ζ' , $\hat{\delta}_{\text{detection}}$ et $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$ sont le seuil de détection, l'estimation du maximum de vraisemblance de $\delta_{\text{detection}}$ sous \mathcal{H}_1 et l'estimation du maximum de vraisemblance du vecteur

ρ_i (qui contient tous les paramètres de nuisance) sous $\mathcal{H}_i, i = 0, 1$. Pour simplifier les calculs, nous considérons la statistique équivalente à (2.79) :

$$T_G(\mathbf{y}) = \text{Ln } L_G(\mathbf{y}) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \varsigma = \text{Ln} \varsigma'. \quad (2.80)$$

Malheureusement, la solution analytique relative au test (2.80) n'existe généralement pas [SM04, Van68, Van02, OVS93]. Par conséquent, nous considérerons le cas asymptotique (en terme d'observations [LN07]). Dans [Kay98, eq (6C.1)], l'auteur a démontré (pour un grand nombre d'observations) que la statistique $T_G(\mathbf{y})$ suivait les lois de probabilité suivantes :

$$T_G(\mathbf{y}) \sim \begin{cases} \chi_1^2 & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \chi_1^2(\kappa'(P_{fa}, P_d)) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad (2.81)$$

où P_{fa} et P_d représentent, respectivement, la probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection par rapport au test (2.77). Supposons que $\text{BCR}(\delta_{\text{detection}})$ existe (voir les hypothèses **A.1** et **A.2**), le paramètre de décentrage $\kappa'(P_{fa}, P_d)$ [Kay98, p.239] est alors donné par

$$\kappa'(P_{fa}, P_d) = \delta_{\text{detection}}^2 (\text{BCR}(\delta_{\text{detection}}))^{-1}. \quad (2.82)$$

D'un autre côté, le paramètre de décentrage peut être évalué à l'aide de P_{fa} et P_d [Sch91, LN07] comme solution de l'équation suivante :

$$Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{fa}) = Q_{\chi_1^2(\kappa'(P_{fa}, P_d))}^{-1}(P_d), \quad (2.83)$$

où $Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{fa})$ et $Q_{\chi_1^2(\kappa'(P_{fa}, P_d))}^{-1}(P_d)$ sont, respectivement, les fonctions inverses de $Q_{\chi_1^2}(\cdot)$ et $Q_{\chi_1^2(\kappa'(P_{fa}, P_d))}(\cdot)$ qui désignent la surface sous la queue de distribution à droite des lois χ_1^2 et $\chi_1^2(\kappa'(P_{fa}, P_d))$.

En combinant, (2.82) et (2.83) nous obtenons

$$\delta_{\text{detection}} = \kappa(P_{fa}, P_d) \sqrt{\text{BCR}(\delta_{\text{detection}})}, \quad (2.84)$$

où le facteur de translation est donné par $\kappa(P_{fa}, P_d) = \sqrt{\kappa'(P_{fa}, P_d)}$ (voir, Fig. 2.12).

Il est intéressant de noter que le test d'hypothèses (2.77) est un test binaire unilatéral et que l'estimateur du MV utilisé est sans contrainte. Ainsi, on peut en déduire que le TRV, utilisé pour déterminer le SRLM, est [LC03b, Sch91, Kay98] : *i*) asymptotiquement UPP, et *ii*) a un taux de fausse alarme asymptotiquement constant.

Par conséquent, de (2.73) et (2.84), le SRLM, donné en (2.73), basé sur l'extension du critère de Smith est asymptotiquement équivalent (à un facteur de translation près) à un test d'hypothèses UPP (2.77).

Enfin, de (2.84) on note que le SRLM basé sur l'extension de Smith est exactement égal au SRLM basé sur le test d'hypothèses (2.77) pour toute valeur de P_{fa} et P_d vérifiant $\kappa(P_{fa}, P_d) = 1$ (voir, Fig. 2.12)

– Applications aux modèles harmoniques multidimensionnels

Nous avons appliqué le critère énoncé dans la section précédente au calcul du SRLM pour le modèle multidimensionnel harmonique, à deux sources et à P paramètres d'intérêt par source. Ce modèle très général peut être ainsi utilisé dans plusieurs applications, par exemple, la localisation de sources sous marines acoustiques [WZ97], le sondage de canal sans fil [MSPM04, STWT06], la localisation de sources en champ proche [EBRM09], la localisation des cibles multiples dans

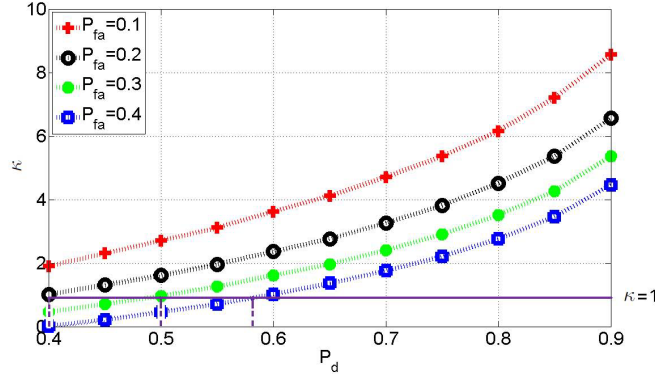


FIGURE 2.12 – Le facteur de translation κ en fonction de la probabilité de fausse alarme P_{fa} et la probabilité de détection P_d . On peut remarquer qu'augmenter P_d ou diminuer P_{fa} a pour effet d'augmenter la valeur du facteur de translation κ (ce qui est normal, puisque ceci correspond à un test d'hypothèses plus sélectif [Sch91, Kay98]).

un système radar MIMO [NS09] etc. Le modèle multidimensionnel harmonique est donné par [HN98, PMB04, GS05, RHG07, Boy08, NS10] :

$$[\mathcal{Y}(t)]_{n_1, \dots, n_P} = [\mathcal{X}(t)]_{n_1, \dots, n_P} + [\mathcal{V}(t)]_{n_1, \dots, n_P}, \quad t = 1, \dots, T, \quad \text{et} \quad n_p = 0, \dots, N_p - 1, \quad (2.85)$$

où les tenseurs $\mathcal{Y}(t)$, $\mathcal{X}(t)$ et $\mathcal{V}(t)$ représentent les observations bruitées, les observations non bruitées et le bruit additif. Le nombre d'observations et le nombre de capteurs dans chaque vecteur sont notés T et (N_1, \dots, N_P) , respectivement. Plus précisément, les observations pour le modèle multidimensionnel harmonique non bruitées sont données par [PMB04, HN98, RHG07, Boy08] :

$$[\mathcal{X}(t)]_{n_1, \dots, n_P} = \sum_{m=1}^2 s_m(t) \prod_{p=1}^P e^{j\omega_m^{(p)} n_p}, \quad (2.86)$$

où $\omega_m^{(p)}$ et $s_m(t)$ sont la $m^{\text{ème}}$ fréquence le long de la $p^{\text{ème}}$ dimension et le $m^{\text{ème}}$ signal source, respectivement. Le signal source est supposé de la forme $s_m(t) = \alpha_m(t)e^{j\phi_m(t)}$ où $\alpha_m(t)$ et $\phi_m(t)$ représentent l'amplitude réelle et la phase du $m^{\text{ème}}$ signal source à la $t^{\text{ème}}$ observation, respectivement. Afin de simplifier les expressions, nous supposons que le bruit est un processus aléatoire blanc, complexe circulaire, Gaussien de moyenne nulle et de variance inconnue σ^2 . De plus, les signaux sources sont supposés connus et orthogonaux [LC93, NS09].

Le vecteur de paramètres inconnus est alors donné par

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\omega}^T \quad \sigma^2]^T, \quad (2.87)$$

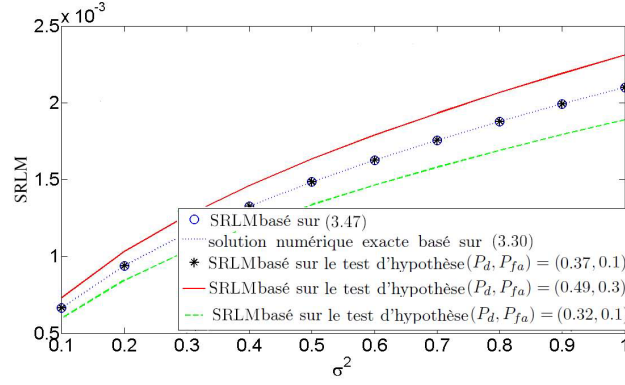
où

$$\boldsymbol{\omega} = [(\boldsymbol{\omega}^{(1)})^T \quad \dots \quad (\boldsymbol{\omega}^{(P)})^T]^T, \quad (2.88)$$

avec

$$\boldsymbol{\omega}^{(p)} = [\omega_1^{(p)} \quad \omega_2^{(p)}]^T. \quad (2.89)$$

Afin d'appliquer (2.84) nous commençons par calculer la BCR. Rappelons, qu'à notre connaissance, aucune expression analytique non matricielle de la BCR pour le modèle (2.85) n'est disponible dans la littérature. Après calculs, nous obtenons que la BCR pour le modèle harmonique

FIGURE 2.13 – SRLM en fonction de σ^2 pour $T = 100$.

multidimensionnel à P paramètres d'intérêt par source, sous l'hypothèse d'orthogonalité des signaux sources, pour le paramètre $\omega_m^{(p)}$ est donné par

$$\text{BCR}(\omega_m^{(p)}) = \frac{6}{TN\text{RSB}_m} C_p, \quad m \in \{1, 2\}, \quad (2.90)$$

où $N = \prod_{p=1}^P N_p$, $\text{RSB}_m = \frac{\|\alpha_m\|^2}{\sigma^2}$ représente le rapport signal à bruit de la $m^{\text{ème}}$ source et où

$$C_p = \frac{N_p(1 - 3V_P) + 3V_P + 1}{(N_p + 1)(N_p^2 - 1)} \quad \text{avec} \quad V_P = \frac{1}{1 + 3 \sum_{p=1}^P \frac{N_p - 1}{N_p + 1}}. \quad (2.91)$$

De plus, les termes croisés sont donnés par

$$\text{BCR}(\omega_m^{(p)}, \omega_{m'}^{(p')}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq m', \\ \frac{-6}{TN\text{RSB}_m} \tilde{C}_{p,p'} & \text{pour } m = m' \text{ et } p \neq p', \end{cases} \quad (2.92)$$

où

$$\tilde{C}_{p,p'} = \frac{3V_P}{(N_p + 1)(N_{p'} + 1)}. \quad (2.93)$$

Nous obtenons le SRLM pour le modèle (2.85) :

Le SRLM pour le modèle harmonique multidimensionnel à P paramètres d'intérêt par source, sous l'hypothèse d'orthogonalité des signaux sources, est donné par

$$\delta = \sqrt{\frac{6}{TN\text{RSB}_E} \left(\sum_{p=1}^P C_p - \sum_{\substack{p, p' = 1 \\ p \neq p'}}^P g_p g_{p'} \tilde{C}_{p,p'} \right)}, \quad (2.94)$$

où le RSB étendu est donné par $\text{RSB}_E = \frac{\text{RSB}_1 \text{RSB}_2}{\text{RSB}_1 + \text{RSB}_2}$ avec $g_p = \text{sgn}(\omega_1^{(p)} - \omega_2^{(p)})$.

– Autre approche pour le calcul du SRLM

Nous avons également traité deux exemples assez connus en traitement d'antenne qui sont : la localisation de sources en champ proche et la localisation de cibles à l'aide d'un radar MIMO en présence d'interférences. Cette approche alternative diffère de la précédente dans le sens où

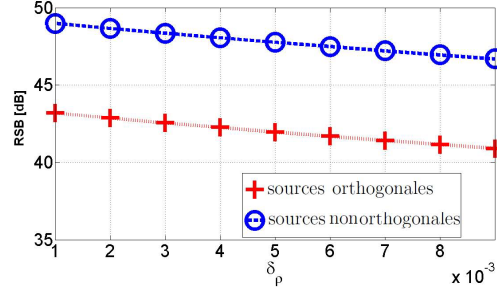


FIGURE 2.14 – Le RSB requis pour résoudre deux sources situées en champ proche en fonction de δ_ρ pour $\delta_\kappa = 0.003$ dans le cas de signaux sources orthogonaux et signaux sources non orthogonaux. On remarque le même comportement du RSB en fonction de δ_κ pour δ_ρ fixe.

le SRLM sera considéré comme un vecteur comportant tous les écarts des paramètres d'intérêt. Dés lors, le test d'hypothèses adéquat est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\delta} \triangleq [\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} \quad \dots \quad \omega_1^{(P)} - \omega_2^{(P)}]^T = \mathbf{0}, \\ \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.95)$$

où l'hypothèse \mathcal{H}_0 représente le cas où les deux sources sont combinées en une seule source, alors que l'hypothèse \mathcal{H}_1 incarne la situation où les deux sources sont résolues.

Pour la localisation de sources en champ proche, nous utiliserons le modèle déterministe d'observations défini au paragraphe 2.3.1.1.1 avec deux sources émettrices. De plus nous supposons que les signaux sources sont connus. Nous avons montré que pour un nombre d'observations très grand, la relation entre le SRLM et le rapport signal à bruit (RSB) requis pour résoudre deux sources connues se situant dans le champ proche est donnée par

$$RSB \triangleq \frac{\|\mathbf{s}_1\|^2 + \|\mathbf{s}_2\|^2}{\sigma^2} = \lambda(P_{fa}, P_d) \frac{\|\mathbf{s}_1\|^2 + \|\mathbf{s}_2\|^2}{2 \|\mathbf{s}_-\|^2 \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\delta}} \quad (2.96)$$

où $\boldsymbol{\delta} = [\delta_\rho \quad \delta_\kappa]^T = [\rho_2 - \rho_1 \quad \kappa_2 - \kappa_1]^T$ avec $\rho_m = \frac{-2\pi}{\nu} \sin(\theta_m)$ et $\kappa_m = \frac{\pi}{\nu r_m} \cos^2(\theta_m)$. Avec

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

et $f_i = \sum_{n=0}^{N-1} (d_n)^i$ où d_n représente la distance entre le premier capteur et le $n^{ème}$ capteur où $\lambda(P_{fa}, P_d)$ est solution de $Q_{(\lambda(P_{fa}, P_d))}^{-1}(P_d) = Q^{-1}(P_{fa})$.

Pour des sources orthogonales (c'est-à-dire, $\mathbf{s}_1^H \mathbf{s}_2 = 0$) nous obtenons le résultat suivant (voir, figure 2.14) :

La relation entre le SRLM et le rapport signal à bruit requis pour résoudre deux sources orthogonales connues, RSB_0 , se situant dans le champ proche est donnée par

$$RSB_o = \frac{\lambda(P_{fa}, P_d)}{2 \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\delta}}. \quad (2.98)$$

Nous avons également calculé le SRLM pour la localisation de sources à l'aide d'un radar MIMO. Les observations issues d'un radar MIMO (dans le cas d'antennes réceptrice et émettrice

espacées entre elles [JLL09]) qui reçoit un signal réfléchi sur M cibles sont données pour la $\ell^{\text{ème}}$ impulsion par

$$\mathbf{Y}_\ell = \sum_{m=1}^M \rho_m e^{2i\pi f_m \ell} \mathbf{a}_\mathcal{R}(\omega_m^{(\mathcal{R})}) \mathbf{a}_\mathcal{T}(\omega_m^{(\mathcal{T})})^T \mathbf{S} + \mathbf{V}_\ell, \quad \ell \in [0 : L - 1] \quad (2.99)$$

où L , ρ_m et f_m représentent le nombre d'échantillons par période d'impulsion, un coefficient proportionnel à la section efficace du radar et la fréquence Doppler normalisée de la $m^{\text{ème}}$ cible, respectivement. T , $N_\mathcal{T}$ et $N_\mathcal{R}$ sont, respectivement, le nombre d'observations, le nombre de capteurs émetteurs et le nombre de capteurs à la réception. Dans la suite, les symboles \mathcal{T} et \mathcal{R} représenteront la partie émettrice et la partie réceptrice du radar MIMO.

De plus, la matrice sources de taille $N_\mathcal{T} \times T$ est donnée par $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_0 \ \dots \ \mathbf{s}_{N_\mathcal{T}-1}]^T$ où $\mathbf{s}_{N_t} = [s_{N_t}(1) \ \dots \ s_{N_t}(T)]^T$, et \mathbf{V}_ℓ (de taille $N_\mathcal{R} \times T$) représente la matrice du bruit. Les vecteurs directionnels de transmission et de réception sont donnés par $\mathbf{a}_\mathcal{T}(\cdot)$ et $\mathbf{a}_\mathcal{R}(\cdot)$. Le $i^{\text{ème}}$ élément de chaque vecteur directionnel est donné par $[\mathbf{a}_\mathcal{T}(\omega_m^{(\mathcal{T})})]_i = e^{j\omega_m^{(\mathcal{T})} d_i^{(\mathcal{T})}}$ et $[\mathbf{a}_\mathcal{R}(\omega_m^{(\mathcal{R})})]_i = e^{j\omega_m^{(\mathcal{R})} d_i^{(\mathcal{R})}}$ où $\omega_m^{(\mathcal{T})} = \frac{2\pi}{\nu} \sin(\psi_m)$, $\omega_m^{(\mathcal{R})} = \frac{2\pi}{\nu} \sin(\theta_m)$ et ψ_m est l'angle de la cible vu de l'antenne émettrice, θ_m est l'angle de la cible vu de l'antenne réceptrice, ν est la longueur d'onde. La distance entre le premier capteur et le $i^{\text{ème}}$ capteur est notée $d_i^{(\mathcal{T})}$ et $d_i^{(\mathcal{R})}$ pour l'antenne de transmission et pour l'antenne de réception, respectivement. Avant de présenter les résultats, commençons par introduire les quantités suivantes : $\omega_c^{(\mathcal{T})} = \frac{\omega_1^{(\mathcal{T})} + \omega_2^{(\mathcal{T})}}{2}$ et $\omega_c^{(\mathcal{R})} = \frac{\omega_1^{(\mathcal{R})} + \omega_2^{(\mathcal{R})}}{2}$ qui représentent les paramètres centraux. $\hat{\mathbf{a}}_\mathcal{T}(\cdot) \triangleq \mathbf{a}_\mathcal{T}(\cdot) \odot \mathbf{d}_\mathcal{T}$, et $\hat{\mathbf{a}}_\mathcal{R}(\cdot) \triangleq \mathbf{a}_\mathcal{R}(\cdot) \odot \mathbf{d}_\mathcal{R}$ avec $\mathbf{d}_\mathcal{T} = [d_0^{(\mathcal{T})} \ d_1^{(\mathcal{T})} \ \dots \ d_{N_\mathcal{T}-1}^{(\mathcal{T})}]^T$ et $\mathbf{d}_\mathcal{R} = [d_0^{(\mathcal{R})} \ d_1^{(\mathcal{R})} \ \dots \ d_{N_\mathcal{R}-1}^{(\mathcal{R})}]^T$.

Nous appliquons un test d'hypothèses binaire

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & (\delta_\mathcal{R}, \delta_\mathcal{T}) = (0, 0), \\ \mathcal{H}_1 : & (\delta_\mathcal{R}, \delta_\mathcal{T}) \neq (0, 0), \end{cases} \quad (2.100)$$

où $\delta_\mathcal{T} \triangleq \omega_2^{(\mathcal{T})} - \omega_1^{(\mathcal{T})}$ et $\delta_\mathcal{R} \triangleq \omega_2^{(\mathcal{R})} - \omega_1^{(\mathcal{R})}$.

Le tableau 2.3 (voir aussi figure 2.15) résume le lien entre le rapport signal à bruit (défini comme $\text{RSB} \triangleq \frac{\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\}}{T\sigma^2}$) et le SRLM pour le modèle (2.99) sous les hypothèses suivantes :

	Avec interférences	Sans interférences $M = 2$	Sans interférences et antennes symétriques
Variance connue	$\frac{N_\mathcal{T} \lambda_K(P_{f_a}, P_d)}{2\zeta^H \mathbf{G}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_D^\perp \mathbf{G}} \mathbf{G} \zeta}$	$\frac{\lambda_K(P_{f_a}, P_d)}{2L\zeta^H \mathbf{K} \zeta}$	$\frac{2N_\mathcal{T} \lambda_K(P_{f_a}, P_d)}{L((\delta_\mathcal{R}^2 + \delta_\mathcal{T}^2)(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \delta_\mathcal{R}^2 \delta_\mathcal{T}^2 (\alpha_2 + \alpha_1)^2)}$
Variance inconnue	$\frac{N_\mathcal{T} \lambda_U(P_{f_a}, P_d)}{2\zeta^H \mathbf{G}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_D^\perp \mathbf{G}} \mathbf{G} \zeta}$	$\frac{\lambda_U(P_{f_a}, P_d)}{2L\zeta^H \mathbf{K} \zeta}$	$\frac{2N_\mathcal{T} \lambda_U(P_{f_a}, P_d)}{L((\delta_\mathcal{R}^2 + \delta_\mathcal{T}^2)(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \delta_\mathcal{R}^2 \delta_\mathcal{T}^2 (\alpha_2 + \alpha_1)^2)}$

TABLE 2.3 – Le RSB requis pour résoudre deux cibles.

- Le sous-espace des interférences (engendré par les $M - 2$ sources restantes) est connu,
- Les paramètres centraux, $\omega_c^{(\mathcal{T})}$ et $\omega_c^{(\mathcal{R})}$ sont supposés connus ou préalablement estimés.

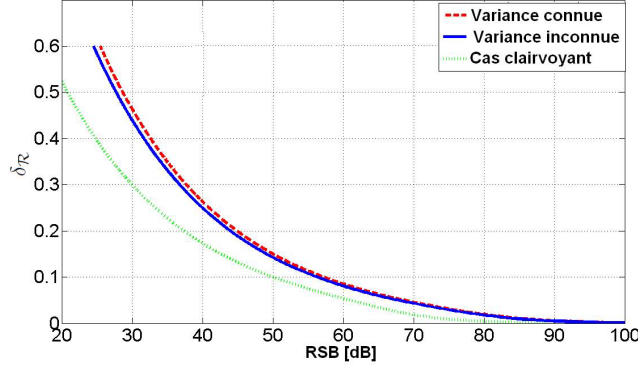


FIGURE 2.15 – $\delta_{\mathcal{R}}$ en fonction du RSB requis pour résoudre deux sources en présence d'une source interférente avec une ALU en émission et réception avec $N_{\mathcal{R}} = N_{\mathcal{T}} = 4$ capteurs, $L = 4$ et $T = 100$ observations. Le cas dit *clairvoyant* correspond au cas idéal où tous les paramètres sont connus y compris $\delta_{\mathcal{R}}$.

- Les α_m , $i = 1 \dots M$ sont considérés déterministes inconnus.
- le bruit est Gaussien complexe blanc circulaire de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Les différentes variables données dans le tableau 2.3 sont explicitées comme suit : $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3 \quad \mathbf{g}_4]$, la matrice des interférences $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_3 \quad \dots \quad \mathbf{d}_M]$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_M]^T$ avec

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{j}{2} \begin{bmatrix} \delta_{\mathcal{R}}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \delta_{\mathcal{T}}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \frac{j}{2} \delta_{\mathcal{R}} \delta_{\mathcal{T}}(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

et où $\mathbf{g}_1 = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_c^{(\mathcal{T})}) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_c^{(\mathcal{R})})$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_c^{(\mathcal{T})}) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\omega_c^{(\mathcal{R})})$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{c}(f) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_c^{(\mathcal{T})}) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_c^{(\mathcal{R})})$, $\mathbf{g}_4 = \mathbf{c}(f) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_c^{(\mathcal{T})}) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\omega_c^{(\mathcal{R})})$ et $\mathbf{c}(f) = [1 \dots e^{i2\pi f(L-1)}]^T$. De plus, $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}^{\perp} \mathbf{G}} = \mathbf{P}_{\mathbf{D}}^{\perp} - \mathbf{P}_{[\mathbf{G} \mathbf{D}]}$. $\lambda_K(P_{fa}, P_d)$ et $\lambda_U(P_{fa}, P_d)$ sont solutions de $Q_{\chi_{2r}^2}^{-1}(P_{fa}) = Q_{\chi_{2r}^2, (\lambda_3(P_{fa}, P_d))}^{-1}(P_d)$ et $Q_{F_{2r, 2r'}}^{-1}(P_{fa}) = Q_{F_{2r, 2r'}, (\lambda_U(P_{fa}, P_d))}^{-1}(P_d)$, respectivement, avec $r = TN_T N_R - M + 1$ et $r' = TN_T N_R - (M + 2)$.

2.3.1.2.3 Géométrie d'antenne Les détails de cette partie sont donnés en **annexe G**. Dans le contexte de la localisation passive de sources utilisant un réseau de capteurs, les performances d'estimation de la direction d'arrivée (DDA) ne sont pas seulement liées au type d'estimateur considéré, mais aussi à la géométrie du réseau de capteurs, c'est-à-dire à la position des capteurs dans l'espace. Pour un réseau de capteurs, les "performances" peuvent être considérées de différents points de vue : les propriétés du faisceau de rayonnement, l'ambiguïté du réseau, l'isotropie, l'estimation en terme d'EQM, etc. Une pléthore de publications concernant l'étude de l'ambiguïté des réseaux (*e.g.*, [Man04, GC81, TGT96, LJ92, GW91]), du faisceau de rayonnement (*e.g.*, [Van02, SM05b]) et des propriétés isotropiques des réseaux (*e.g.*, [BM03]), sont disponibles dans la littérature.

Dans le cadre de la thèse de Dinh Thang Vu, nous nous sommes intéressés à la géométrie optimale des réseaux de capteurs qui mène aux meilleures performances en terme d'EQM. Plus particulièrement, nous nous sommes concentrés sur les géométries 3D des réseaux de capteurs qui ont été moins étudiées dans la littérature. En effet, malgré la richesse des résultats concernant les antennes planaires, les antennes 3D ont été peu étudiées. Par contre il existe des applications où les capteurs sont éparpillés dans l'espace ce qui fait que l'antenne est de forme arbitraire (réseau

de télescopes sur la surface de la terre, réseaux d'électrodes sur le crâne d'un patient, réseaux de capteurs dans une pièce ou dans un espace réduit pour des fonctions de robotique, réseau de bouées à la surface de la mer, etc). En outre, par rapport à l'antenne 2D, les antennes 3D ont certains avantages intuitifs, tels que lever l'ambiguïté de l'antenne 2D dans certains cas.

Les analyses fournies dans la littérature traitent de deux types de géométries : les géométries basées sur les réseaux circulaires [Van02] ou bien les réseaux sphériques [SSL68], et les géométries basées sur les réseaux linéaires tels que les réseaux linéaires uniformes, les réseaux en V, les réseaux en croix ou en rectangle. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés ici au deuxième type de géométrie.

La BCR a largement été utilisée dans la littérature pour décrire les propriétés fondamentales des réseaux. Par une forme simple des expressions de la BCR, [HS91] a montré l'impact de la position des capteurs sur la précision de l'estimation de la DDA dans le cas des réseaux de capteurs 2D. Concernant l'estimation de la DDA, dans [Nie94], [BM03], [MS91], des conditions sur la position des capteurs pour assurer la propriété d'isotropie pour laquelle, les réseaux de capteurs ont la même précision d'estimation sur l'ensemble des DDA, ont été calculées par l'étude des éléments de la BCR. Dans [YS05], [LS09], la BCR pour l'estimation de la position des sources basée sur la méthode TDOA est utilisée afin de montrer que la meilleure géométrie qui minimise la trace de la BCR contient des réseaux angulaires uniformes. L'application de la BCR Bayésienne pour le cas où les sources sont dans le même plan que le réseau et pour le contexte Bayésien où les paramètres (DDA) sont supposés aléatoires est disponible dans [OM05]. Dans [GM06], une étude approfondie de la BCR pour les réseaux de capteurs 2D a été proposée et a mené à des résultats intéressants concernant un type de réseau particulier appelé le réseau en V, en terme d'EQM et d'isotropie. Basé sur les résultats présentés dans [GM06], un nouveau type de géométrie des réseaux appelé antenne optimale sans ambiguïté basée sur antenne en V a été présenté dans [GAM09]. Finalement, dans [FC09], les auteurs ont montré que la BCR pour les modèles déterministe et stochastique, liée à la variance de l'estimation de la DDA obtenue par l'algorithme MUSIC, peut être exprimée avec la même expression qui est une fonction de la position des capteurs.

En traitement d'antenne, les signaux des sources sont généralement modélisés comme un processus aléatoire ou une séquence déterministe appelés modèle stochastique et modèle déterministe, respectivement [OVSN93]. Plus particulièrement, pour le modèle déterministe, la forme d'onde des signaux peut être supposée connue ou inconnue par le récepteur. Par conséquent, la charge de calcul varie en fonction de l'hypothèse sur la séquence des signaux utilisée. Si la séquence des signaux est supposée inconnue par le récepteur, ces signaux seront considérés comme des paramètres d'intérêt à estimer, ce qui augmente la dimension du vecteur des paramètres. Cependant, il y a des applications où l'amplitude des signaux est connue par le récepteur telles que dans les télécommunications. La connaissance du signal peut améliorer les performances d'estimation, et réduire également la complexité du problème. Les travaux concernant le contexte des signaux connus sont *e.g.*, [LC93, CM97, LHSV95, LV99, Cho04].

En fonction du modèle des signaux utilisé, il y a bien sûr deux types de BCR associés : la BCR stochastique et la BCR déterministe. Il a été montré que la BCR stochastique peut être atteinte pour un grand nombre des observations [SN90a], cependant, elle n'est pas atteinte pour un RSB élevé où le nombre des observations est faible [RFBL07]. D'autre part, la BCR déterministe est atteinte pour un RSB élevé [RFCL06] mais elle n'est pas atteinte pour un grand nombre des observations [SN90a]. De manière surprenante, tous les résultats proposés précédemment sont menés dans le cadre du modèle stochastique, c'est-à-dire que seule la BCR stochastique est utilisée. Nous avons montré que les résultats basés sur le modèle déterministe diffèrent considérablement de ceux basés sur le modèle stochastique.

Nous avons considéré les deux modèles déterministe et stochastique pour l'étude de la géométrie 3D.

- Tout d'abord, nous avons détaillé les expressions de la matrice d'information de Fisher (FIM) concernant l'estimation de l'azimut et de l'élévation dans le cas d'un réseau de capteurs 3D général.
- Deuxièmement, nous avons calculé les expressions analytiques de la BCR pour un réseau de capteurs quelconque constitué par un réseau planaire et une branche orthogonale. Ce modèle est la première étape pour analyser la contribution de la troisième dimension sur les performances d'estimation.
- Troisièmement, nous avons proposé plusieurs expressions analytiques de la BCR pour des réseaux de capteurs constitués par des branches ULA afin d'analyser l'impact de la géométrie d'antenne sur les performances d'estimation. Il faut noter que les types de géométries qui ont été étudiés dans le cas 2D et appelés antenne en V, antenne en L, ne sont que des cas particuliers dans notre approche. Dans [HSW91], les auteurs montrent que l'antenne en L permet d'améliorer de 37% la précision par rapport à l'antenne en croix. Dans [FT08], les auteurs ont introduit les conditions d'isotropie pour la position des capteurs, et pour l'angle d'ouverture entre les 2 branches de l'antenne en V uniforme/non-uniforme. Notre objectif était d'étendre ces géométries au cas 3D pour analyser l'impact de la branche 3D supplémentaire.
- Finalement, l'impact de la troisième dimension a été illustré à partir de comparaisons entre l'antenne 3D et l'antenne 2D, mais également entre l'antenne 3D et l'antenne circulaire uniforme (de même nombre de capteurs). Cependant, il faut noter que pour le même nombre de capteurs, afin de former la troisième dimension des réseaux, l'ouverture des réseaux sera diminuée. Par conséquent, la précision de l'estimation des réseaux de capteurs sera affectée.

On considère le problème classique où l'on cherche à localiser une source émettant un signal $s(t)$ déterministe (le cas stochastique est détaillé dans l'**annexe G**) et à bande étroite à l'aide d'un réseau de capteurs. Les capteurs sont supposés identiques et omni-directionnels. La source et le $i^{\text{ème}}$ capteur du réseau sont représentés dans l'espace à l'aide de leurs coordonnées sphériques, c'est-à-dire le couple (ϕ, φ) pour la source (supposée en champ lointain) et le triplet $(\rho_i, \varrho_i, \xi_i)$ pour le $i^{\text{ème}}$ capteur (voir figure 2.16(a)). Dans cette étude, nous considérons deux types de géométrie d'antenne. La première concerne une antenne planaire en V où les deux branches, séparées par un angle noté Δ , sont constituées par des antennes linéaires non obligatoirement uniformes. La deuxième géométrie considérée consiste simplement en une extension de l'antenne planaire où une branche (antenne linéaire non obligatoirement uniforme) orthogonale au plan est ajoutée (voir figure 1(b)). À partir des hypothèses susmentionnées, une simple analyse du retard inter-capteur conduit au modèle d'observation à la sortie du réseau suivant

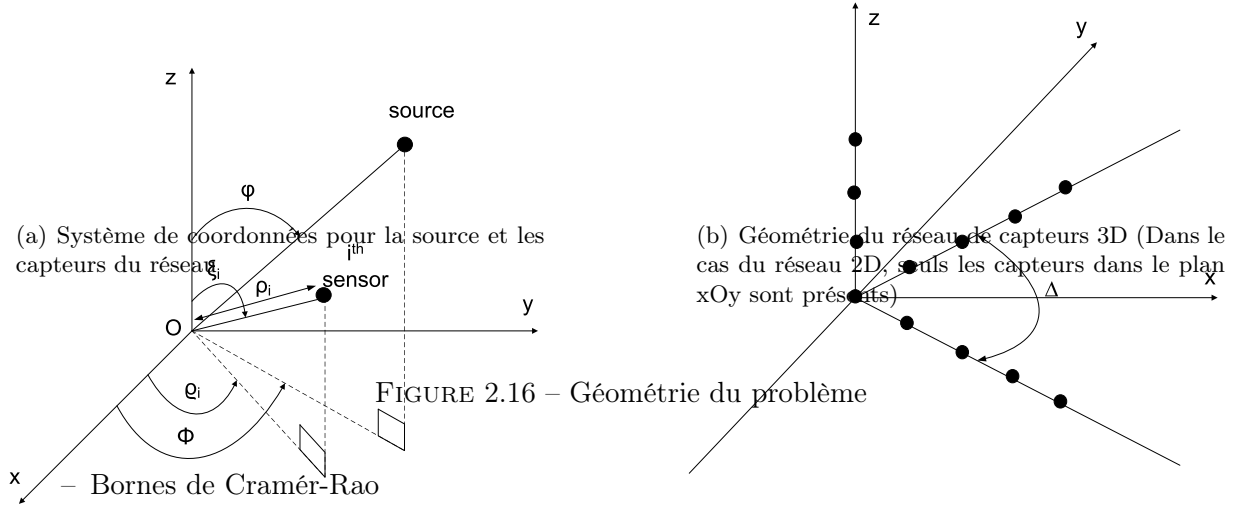
$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_M(t)]^T = \mathbf{a}(\varphi, \phi)s(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.102)$$

où $t = 1, \dots, T$. T est le nombre d'observations, et le vecteur directionnel est donné par :

$$\mathbf{a}(\varphi, \phi) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2j\pi\rho_1}{\lambda}(\sin\varphi \sin\xi_1 \cos(\phi-\varrho_1) + \cos\xi_1 \cos\varphi)} \\ \vdots \\ e^{\frac{2j\pi\rho_M}{\lambda}(\sin\varphi \sin\xi_M \cos(\phi-\varrho_M) + \cos\xi_M \cos\varphi)} \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

Le vecteur de bruit $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{C}^M$ est supposé gaussien, circulaire, i.i.d., de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$. Le nombre de capteurs dans le plan est noté N_1 et le nombre de

capteurs pour la branche orthogonale dans le cas de l'antenne 3D est noté N_2 . Le nombre total de capteurs $M = N_1 + N_2$ sera constant lors de la comparaison des deux géométries.



L'analyse des performances ultimes, en terme de variance, qu'un estimateur (non biaisé) peut espérer atteindre est généralement conduite à l'aide des BCR. Dans le cas du modèle d'observation (2.102), il est clair que $\mathbf{y}(t)$ est distribué selon une loi gaussienne multivariée de moyenne $\mathbf{a}(\varphi, \phi)s(t)$ et de variance $\sigma^2 \mathbf{I}$. Les paramètres d'intérêt pour cette étude étant l'azimut et l'élévation, c'est-à-dire ϕ et φ (puisque la variance du bruit est découplée par rapport aux autres paramètres, cette dernière est omise du vecteur de paramètres). Seule la moyenne de $\mathbf{y}(t)$ est paramétrée. Dans ce cas, après concaténation de tous les vecteurs d'observation ($t = 1, \dots, T$), la BCR, notée \mathbf{C} , est donnée par [SN89]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{\varphi\varphi} & C_{\varphi\phi} \\ C_{\phi\varphi} & C_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\mathbf{s}^H \mathbf{s}} \begin{bmatrix} \text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H(\varphi, \phi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}(\varphi, \phi)}{\partial \varphi} \right) & \text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H(\varphi, \phi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{a}(\varphi, \phi)}{\partial \phi} \right) \\ \text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H(\varphi, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \mathbf{a}(\varphi, \phi)}{\partial \varphi} \right) & \text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^H(\varphi, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \mathbf{a}(\varphi, \phi)}{\partial \phi} \right) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.104)$$

où l'on définit $\mathbf{s} = [s(1) \dots s(T)]^T$ et, où $C_{\varphi\varphi}$ et $C_{\phi\phi}$ représentent, respectivement, la BCR concernant l'élévation et la BCR concernant l'azimut. $C_{\varphi\phi}$ et $C_{\phi\varphi}$ représentent le couplage des paramètres φ et ϕ .

Grâce à la structure du vecteur directionnel donné par le modèle d'observation (2.102) et après quelques efforts calculatoires qui sont détaillés dans l'annexe, en posant : $\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s}^H \mathbf{s}$, $C_{RSB} = \frac{8\pi^2 \|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2 \lambda^2}$, $S_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \rho_i^2$, et $S_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} \rho_i^2$, on obtient les expressions analytiques des BCR dans le cas de l'antenne 3D :

$$C_{\varphi\varphi}^{3D} = \frac{2}{C_{RSB}} \frac{1 - \cos \Delta \cos 2\phi}{S_1 \sin^2 \Delta \cos^2 \varphi + 2S_2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \Delta \cos 2\phi)}, \quad (2.105)$$

$$C_{\phi\phi}^{3D} = \frac{4}{C_{RSB} \sin^2 \varphi} \frac{\frac{1}{2} S_1 \cos^2 \varphi (1 + \cos \Delta \cos 2\phi) + S_2 \sin^2 \varphi}{S_1^2 \sin^2 \Delta \cos^2 \varphi + 2S_1 S_2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \Delta \cos 2\phi)}, \quad (2.106)$$

$$C_{\varphi\phi}^{3D} = \frac{1}{C_{RSB} \tan \varphi} \frac{S_1 \cos \Delta \sin 2\phi}{S_1^2 \sin^2 \Delta \cos^2 \varphi + 2S_1 S_2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \Delta \cos 2\phi)}. \quad (2.107)$$

Puisque l'antenne 2D n'est qu'un cas particulier de l'antenne 3D ($N_2 = 0$), les BCR sont obtenues en posant $S_2 = 0$ dans les équations ci-dessus

$$C_{\varphi\varphi}^{2D} = \frac{2}{C_{RSB}} \frac{1 - \cos \Delta \cos 2\phi}{S_1 \sin^2 \Delta \cos^2 \varphi}, \quad (2.108)$$

$$C_{\phi\phi}^{2D} = \frac{2}{C_{RSB}} \frac{1 + \cos \Delta \cos 2\phi}{S_1 \sin^2 \Delta \sin^2 \varphi}, \quad (2.109)$$

$$C_{\varphi\phi}^{2D} = \frac{1}{C_{RSB}} \frac{\cos \Delta \sin 2\phi}{S_1 \sin^2 \Delta \cos \varphi \sin \varphi}. \quad (2.110)$$

De plus, dans le cas particulier où l'on travaille avec $\Delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque l'antenne 2D et l'antenne 3D représentent, respectivement, la base canonique de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , on obtient des formules compactes :

$$C_{\varphi\varphi}^{3D\perp} = \frac{1}{C_{RSB}} \frac{2}{S_1 \cos^2 \varphi + 2S_2 \sin^2 \varphi}, \quad (2.111)$$

$$C_{\phi\phi}^{3D\perp} = \frac{2}{C_{RSB} S_1 \sin^2 \varphi}, \quad (2.112)$$

$$C_{\varphi\phi}^{3D\perp} = 0. \quad (2.113)$$

et

$$C_{\varphi\varphi}^{2D\perp} = \frac{2}{C_{RSB} S_1 \cos^2 \varphi}, \quad (2.114)$$

$$C_{\phi\phi}^{2D\perp} = \frac{2}{C_{RSB} S_1 \sin^2 \varphi}, \quad (2.115)$$

$$C_{\varphi\phi}^{2D\perp} = 0. \quad (2.116)$$

A partir de ces expressions, on peut remarquer que :

- lorsque la source se situe dans le plan, c'est-à-dire lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $C_{\varphi\varphi}^{2D}$ tend vers l'infini tandis que $C_{\varphi\varphi}^{3D}$ reste fini. L'antenne 3D permet donc de lever l'ambiguïté.
- Dans le cas où $\Delta = \frac{\pi}{2}$, il y a découplage entre ϕ et φ ce qui confirme l'intuition. De plus, $C_{\phi\phi}^{3D\perp}$ et $C_{\phi\phi}^{2D\perp}$ ne dépendent plus de ϕ (propriété d'isotropie par rapport à ϕ). Si de plus $S_1 = 2S_2$, c'est-à-dire lorsque les trois branches de l'antenne 3D sont constituées par des antennes linéaires uniformes avec le même nombre de capteurs, l'estimation de φ ne dépend plus de la position de la source (propriété d'isotropie par rapport à φ et ϕ) pour l'antenne 3D.

– Analyses et simulations

Des résultats de simulation concernant le comportement des BCR calculées précédemment en fonction du degré de liberté Δ . Toutes les branches, que le réseau soit 2D (deux branches) ou 3D (trois branches), sont des antennes linéaires uniformes avec un espacement inter-capteur

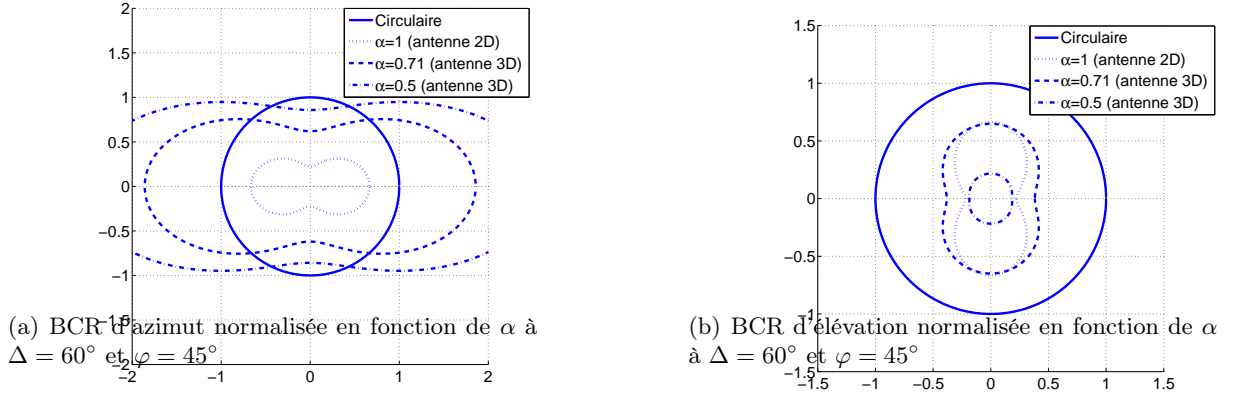
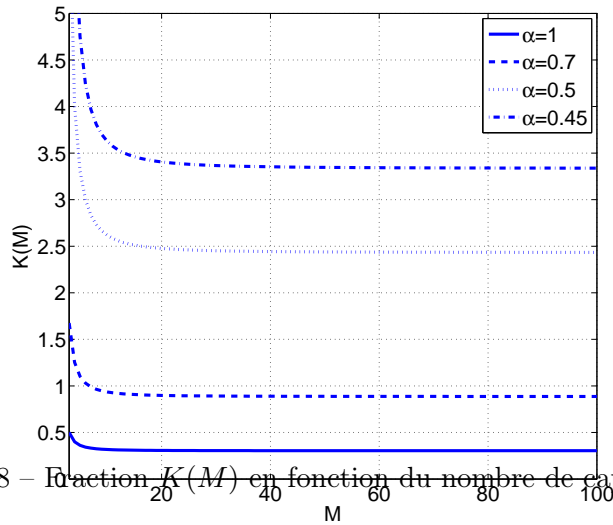


FIGURE 2.17 – Comparaison de performance des antennes en V avec une antenne circulaire

FIGURE 2.18 – Fraction $K(M)$ en fonction du nombre de capteurs M

d'une demi longueur d'onde. Pour toutes les simulations, le rapport signal sur bruit est de $10dB$ et le nombre d'observations est de $T = 50$.

Il est intéressant de comparer les performances de l'antenne en V avec une antenne isotrope classique telle que l'antenne circulaire. Ces antennes ont le même nombre de capteurs. L'antenne circulaire ayant des capteurs séparés de manière équidistante $\frac{\lambda}{2}$, la valeur de son rayon est donc $r = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\pi}{M}}$. En posant $\alpha = \frac{N_1}{M} \leq 1$, il vient que la valeur de α associée à l'antenne planaire est égale à 1 tandis que celle associée à l'antenne 3D est strictement inférieure à 1. Les figures 2.17(a) et 2.17(b) montrent respectivement les BCR concernant l'azimut et l'élévation normalisées par la borne de l'antenne circulaire pour un angle d'ouverture $\Delta = 60^\circ$ et pour une élévation $\varphi = 45^\circ$. Les performances d'estimation concernant l'élévation des antennes en V sont toujours meilleures

par rapport à l'antenne circulaire, alors que celles concernant l'estimation d'azimut sont liées au nombre de capteurs que l'on place sur l'axe orthogonal, c'est-à-dire au coefficient α . Pour des valeurs de α proches de 1, l'estimation de l'élévation des antennes en V est meilleure que celle de l'antenne circulaire.

En particulier, si l'antenne en V et son extension 3D sont isotropes ($\Delta = \frac{\pi}{2}$), le rapport de la BCR sur l'azimut de ces antennes est donné par :

$$K(M) = \frac{C_{\phi\phi}^{2D,3D\perp}}{C_{\phi\phi}^{circulaire}} = \frac{3}{\alpha(\alpha^2 M^2 - 1) \sin^2 \frac{\pi}{M}}. \quad (2.117)$$

Si $\alpha = 1$ et $M \gg 1 \rightarrow K(M) = \frac{1}{3}$.

Si $\alpha < 1$ et $\alpha M \gg 1 \rightarrow K(M) = \frac{1}{3\alpha^2}$.

On peut dire que l'antenne en V a de meilleures performances en terme d'estimation d'azimut par rapport à l'antenne circulaire si et seulement si la fraction $K(M)$ est inférieure à 1. La figure 2.18 montre que l'antenne isotrope en V est meilleure que l'antenne circulaire à condition que la valeur de α satisfasse : $0.76 < \alpha < 1$.

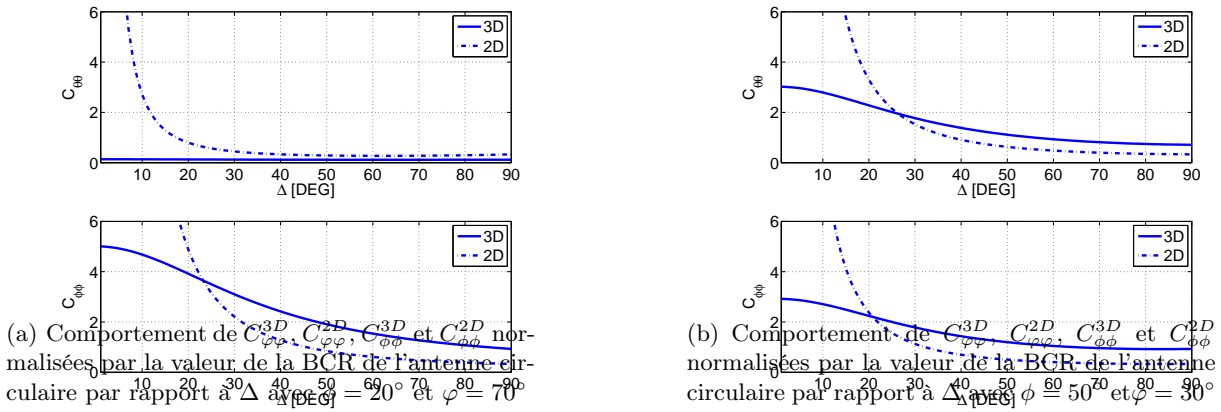


FIGURE 2.19 – BCR normalisée en fonction de l'angle d'ouverture

Dans la suite, on compare les performances d'estimation entre le modèle 2D et 3D. Dans cette simulation, le réseau 2D est composé de $M = 7$ capteurs (un à l'origine plus trois sur chacune des deux branches). Le réseau 3D est également composé de $M = 7$ capteurs (un à l'origine plus deux sur chacune des trois branches). La figure 2.19(a) montre le comportement de $C_{\phi\phi}^{3D}$, $C_{\phi\phi}^{2D}$, $C_{\phi\phi}^{3D}$ et $C_{\phi\phi}^{2D}$ par rapport à l'angle d'ouverture Δ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour cette simulation, les valeurs de ϕ et φ sont respectivement de 20° et 70° . Nous qualifierons ce scénario de source rasante par rapport au plan de l'antenne. On observe que pour l'estimation de l'élévation, φ , le réseau 3D permet toujours d'obtenir de meilleures performances par rapport au réseau 2D. Ceci est toujours vrai pour une valeur d'élévation de $\varphi \geq 62.2^\circ$ dans ce cas, car on montre facilement que :

$$\frac{C_{\phi\phi}^{3D}}{C_{\phi\phi}^{2D}} < 1 \Leftrightarrow \varphi > \arctan \sqrt{\max_{\Delta, \phi} \{\Gamma\}}. \quad (2.118)$$

avec $\Gamma = \frac{\sin^2 \Delta ((M^2-1)-\alpha(\alpha^2 M^2-1))}{(1-\cos \Delta \cos 2\phi)4(1-\alpha)((1-\alpha)M+1)(2(1-\alpha)M+1)}$, $\alpha = \frac{N_1}{M} = \frac{5}{7}$, $M = 7$, $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\Delta \in (0^\circ, 180^\circ)$, $\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Au contraire, il existe une valeur de Δ (environ 23° dans ce cas) en dessous de laquelle le réseau 3D permet de meilleures performances par rapport au réseau 2D pour l'estimation de l'azimut. Cette valeur critique peut être obtenue en résolvant numériquement l'équation $C_{\phi\phi}^{3D} = C_{\phi\phi}^{2D}$ en Δ . La figure 2.19(b) montre les mêmes courbes, mais pour des valeurs de ϕ et φ respectivement égales à 50° et 30° . Nous qualifierons ce scénario de source haute par rapport au plan de l'antenne. Dans ce cas, il convient, contrairement à l'intuition, de choisir le réseau 2D au dessus d'une certaine limite d'angle d'ouverture obtenue en résolvant numériquement $\max(C_{\phi\phi}^{3D} = C_{\phi\phi}^{2D}, C_{\varphi\varphi}^{3D} = C_{\varphi\varphi}^{2D})$.

2.3.2 Bornes globales déterministes

2.3.2.1 Localisation de source en champ proche

Nous rappelons que la BCR est une borne non utilisable dans les zones non-asymptotiques, et donc non utilisable dans ces zones et que la zone dite de décrochement est un accroissement brusque de l'erreur quadratique moyenne (dont la cause est l'apparition des observations aberrantes). Ainsi, la zone de décrochement d'un estimateur délimite sa zone de fonctionnement optimal. Toujours dans le cadre de la thèse de Mohammed Nabil El Korso, nous avons donc complété l'analyse présentée au paragraphe 2.3.1.1.1 en calculant différentes bornes déterministes inférieures de l'erreur quadratique moyenne dans le cadre de la localisation passive d'une source en champ proche : la borne de McAulay-Seidman (BMS) [MS69], la borne de Hammersley-Chapman-Robbins (BHCR) [Ham50], la borne de McAulay-Hofstetter (BMH) [MH71] et, plus particulièrement, une borne récemment introduite dans la littérature dénommée la borne de Fourier Cramér-Rao (BFCR) [TT10]. A notre connaissance, aucun résultat concernant des bornes inférieures autres que la BCR (par rapport à la localisation en champ proche), n'était disponible dans la littérature. Ce travail est actuellement soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

Le modèle des observations est le même que celui présenté au paragraphe 2.3.1.1.1. Les hypothèses suivantes ont été utilisées :

- On admet que le bruit suit une loi normale complexe circulaire multidimensionnelle, de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ_{bruit} connue et supposée de rang plein.
- Le vecteur de paramètres inconnus est défini par $\xi = [\omega \ \phi]^T$ [LC93].

La fonction de vraisemblance relative au vecteur des observations $\chi = [\mathbf{y}^T(1) \dots \mathbf{y}^T(T)]^T \sim \mathcal{CN}(\mu(\xi_0), \Sigma(\xi_0))$ pour un ξ_0 donné, s'écrit simplement par :

$$p(\chi|\xi_0) = \frac{1}{\pi^{NT} \det \{\Sigma(\xi_0)\}} e^{-(\chi - \mu(\xi_0))^H \Sigma(\xi_0)^{-1} (\chi - \mu(\xi_0))}, \quad (2.119)$$

où ξ_0, ω_0, ϕ_0 représentent les vraies valeurs des paramètres candidats ξ, ω et ϕ , respectivement. Les valeurs de $\mu(\xi_0)$ et $\Sigma(\xi_0)$ seront spécifiées par la suite (selon le modèle déterministe ou aléatoire).

Dans [Gla72, FL02, CGQL08, TT10] les auteurs ont proposé une unification de différentes bornes sur l'erreur quadratique moyenne. Plus précisément, s'appuyant sur un problème d'optimisation sous contraintes, Forster et Larzabal [FL02], ont présenté une unification de bornes sur l'erreur quadratique moyenne en imposant des contraintes sur le biais. Ils ont montré, par un choix judicieux de ces contraintes, qu'on pouvait ainsi donner une expression explicite de la borne de Cramér-Rao, la borne de Barankin ou la borne de Bhattacharyya. Notons que l'on peut trouver l'extension des travaux de Forster et Larzabal [FL02] dans le cas de plusieurs paramètres inconnus déterministes dans [CGQL08]. Dans [TT10], Todros et Tabrikian ont proposé

une nouvelle classe de bornes sur l'erreur quadratique moyenne en utilisant la transformation intégrale généralisée appliquée à la fonction de vraisemblance. Ainsi, ils ont montré que certaines bornes sur l'erreur quadratique moyenne (par exemple, la borne de Cramér-Rao, la borne de McAulay-Seidman et la borne de Battacharya) sont obtenues par un choix approprié du noyau de la transformation intégrale de la fonction de rapport de vraisemblance.

En utilisant l'une des deux approches, on constate que l'unification s'exprime à l'aide d'une matrice \mathbf{K} inversible et d'une matrice $\mathbf{\Gamma}$ à valeurs complexes, comme suit :

$$\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \int_{\mathbb{C}^{NT}} (\hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}_0) (\hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}_0)^T p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_0) d\boldsymbol{\chi} \succcurlyeq \mathbf{C} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Gamma}^H \quad (2.120)$$

où \mathbf{K} peut être décomposée à l'aide de $\boldsymbol{\gamma}$ comme suit $\mathbf{K} = \int_{\mathbb{C}^{NT}} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^H p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_0) d\boldsymbol{\chi}$ et où $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ est un estimateur du vrai paramètre déterministe $\boldsymbol{\xi}_0$ et où $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}$ signifie que la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est définie non négative. Par conséquent, pour différentes valeurs de $\mathbf{\Gamma}$ et de $\boldsymbol{\gamma}$, on aura différentes bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne. La BCR (notée dans cette section \mathbf{C}_{BCR} par souci d'uniformisation) est donnée par le couple :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{\text{BCR}} &= \mathbf{1}_2, \\ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BCR}} &= \left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0}, \end{cases} \quad (2.121)$$

où $\mathbf{1}_l$ représente le vecteur de dimension $l \in \{1, \dots, L\}$ rempli de 1. La borne de McAulay-Seidman (BMS) [MS69] peut être définie par le couple suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{\text{BMS}} &= \boldsymbol{\Phi}, \\ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BMS}} &= [\nu(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}_1) \dots \nu(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}_L)]^T, \end{cases} \quad (2.122)$$

où $\nu(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}_l) = \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}_l)}{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}_0)}$, $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_0 \dots \boldsymbol{\xi}_L - \boldsymbol{\xi}_0]^T$ avec $\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_L\}$ qui représente un ensemble de points test appartenant à Θ . La borne de Hammersley-Chapman-Robbins (BHCR) [Ham50] est, quant à elle, donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{\text{BHCR}} &= [\mathbf{0}_2 \ \boldsymbol{\Phi}], \\ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BHCR}} &= [1 \ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BMS}}]^T, \end{cases} \quad (2.123)$$

où $\mathbf{0}_l$ représente le vecteur de dimension $l \in \{1, \dots, L\}$ rempli de 0 et enfin la borne de McAulay-Hofstetter (BMH) [MH71] peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{\text{BMH}} &= [\mathbf{I}_2 \ \boldsymbol{\Phi}], \\ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BMH}} &= [\boldsymbol{\gamma}_{\text{BCR}} \ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BMS}}]^T, \end{cases} \quad (2.124)$$

où \mathbf{I}_2 est la matrice identité d'ordre 2. La borne de Fourier Cramér-Rao (BFCR), récemment proposée [TT10], peut également être écrite sous la forme (2.120). Pour avoir un gain en temps de calcul, cette dernière utilise la transformée de Fourier discrète (TFD) des vecteurs $\boldsymbol{\Phi}$ et $\boldsymbol{\gamma}_{\text{BMS}}$. La TFD peut être obtenue grâce à une multiplication matricielle notée \mathbf{W} . Ainsi, le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ adéquat pour la BFCR est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{\text{BFCR}} &= [\mathbf{I}_2 \ \boldsymbol{\Phi} \mathbf{W}^H] \\ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BFCR}} &= [\boldsymbol{\gamma}_{\text{BCR}} \ \boldsymbol{\gamma}_{\text{BMS}} \mathbf{W}^T]^T. \end{cases} \quad (2.125)$$

où

$$[\mathbf{W}]_{p,l} = \exp(-i\boldsymbol{\Omega}_p^T \boldsymbol{\xi}_l) \quad (2.126)$$

représente la matrice de transformation relative à la TFD bi-dimensionnelle et $\mathbf{\Omega}_p$ s'exprime à l'aide du $p^{\text{ème}}$ point test fréquentiel $\mathbf{f}_p = [f_p \ f'_p]^T$ comme suit : $\mathbf{\Omega}_p = \begin{bmatrix} \frac{2\pi f_p}{\delta([\xi]_1)L_1} & \frac{2\pi f'_p}{\delta([\xi]_2)L_2} \end{bmatrix}^T$, avec $L = L_1 L_2$, tel que $f_p \in \{1, \dots, L_1\}$, $f'_p \in \{1, \dots, L_2\}$, L_i est le nombre de points test associé à la variable $[\xi]_i$ et $\delta([\xi]_i)$ est la distance (constante) entre deux points test associée à la variable $[\xi]_i$, $i = 1, 2$.

Après calcul, on peut montrer que les bornes précitées peuvent être écrites comme suit pour le modèle d'observation sus-mentionné

$$\mathbf{C}_{\text{BMS}}^{(L)} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{\Phi}^T, \quad (2.127)$$

$$\mathbf{C}_{\text{BHCR}}^{(L)} = \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Psi} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{\Phi}^T, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{C}_{\text{BMH}}^{(L)} = \mathbf{C}_{\text{BCR}} + \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T, \quad (2.129)$$

$$\mathbf{C}_{\text{BFCR}}^{(L,P)} = \mathbf{C}_{\text{BCR}} + \mathbf{Q} \mathbf{W}^H (\mathbf{W} \mathbf{R} \mathbf{W}^H)^{-1} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T, \quad (2.130)$$

où nous avons introduit la dépendance de ces bornes par rapport aux points test² (symboles L et P). Notons $\text{DKL}(p(\mathbf{x}|\xi_l)||p(\mathbf{x}|\xi_0))$, la distance de Kullback-Leibler [Sch91] entre $p(\mathbf{x}|\xi_l)$ et $p(\mathbf{x}|\xi_0)$. On peut alors définir tous les éléments apparaissant dans les équations ci-dessus comme suit :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_{\text{BCR}} \mathbf{D} - \mathbf{\Phi}, \quad (2.131)$$

tel que

$$\mathbf{D} = [d(\xi_1) \ \dots \ d(\xi_L)],$$

et

$$d(\xi_l) = - \left(\frac{\partial \text{DKL}(p(\mathbf{x}|\xi_l)||p(\mathbf{x}|\xi_0))}{\partial \xi} \right)^T \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (2.132)$$

où la dérivée vectorielle est donnée par $[\dot{\boldsymbol{\mu}}(\xi_0)]_{i,j} = \frac{\partial [\boldsymbol{\mu}(\xi)]_i}{\partial [\xi]_j} \Big|_{\xi=\xi_0}$. De plus, la matrice \mathbf{R} est donnée par

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Psi} - \mathbf{D}^T \mathbf{C}_{\text{BCR}} \mathbf{D}, \quad (2.133)$$

et les éléments de la matrice $\mathbf{\Psi}$ sont définis par

$$[\Psi]_{m,n} = E_{\chi|\xi_0} \{v(\mathbf{x}, \xi_m) v(\mathbf{x}, \xi_n)\}, \quad (2.134)$$

où $E_{\chi|\xi_l} \{\cdot\}$ indique l'opérateur d'espérance mathématique relatif à $p(\chi|\xi_l)$.

Sachant que, pour un modèle Gaussien (circulaire) à moyenne paramétrée ou à covariance paramétrée, \mathbf{C}_{BCR} est donné par l'inverse de la MIF, alors dans la suite nous ne donnerons que l'expression de \mathbf{D} et $\mathbf{\Psi}$. Ainsi, en utilisant la valeur de \mathbf{D} et de $\mathbf{\Psi}$ et (2.131) et (2.133), nous avons obtenu $\mathbf{C}_{\text{BMS}}^{(L)}$, $\mathbf{C}_{\text{BHCR}}^{(L)}$, $\mathbf{C}_{\text{BMH}}^{(L)}$ et $\mathbf{C}_{\text{BFCR}}^{(L,P)}$.

– Expressions analytiques pour le modèle déterministe

Pour le modèle déterministe, nous avons $\chi \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}(\xi_0), \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}})$ avec

$$\boldsymbol{\mu}(\xi_0) = [s(1)\mathbf{a}^T(\omega_0, \phi_0) \dots s(L)\mathbf{a}^T(\omega_0, \phi_0)]^T,$$

2. Notons par ailleurs que les valeurs des points tests qui maximisent les bornes (dites bornes optimales) sont celles où la fonction d'ambiguïté exhibe des maxima locaux [RM95, XBR04, RM97, TK99, Xu01, RAFL07]. Cela étant dit, il a été montré que, dans le cas où, les points tests couvrent les extrémités de $\boldsymbol{\Theta}$ et aussi la vraie valeur du paramètre ξ_0 , alors même si on obtient des bornes en dessous des bornes optimales, la différence est suffisamment faible pour que leur utilisation reste pertinente.

et

$$[\mathbf{FIM}]_{i,k} = 2\Re \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)^H}{\partial [\boldsymbol{\xi}_0]_i} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)}{\partial [\boldsymbol{\xi}_0]_k} \right\}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2. \quad (2.135)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \text{KLD}(p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n)||p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi})) &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n) \text{Ln} \frac{p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n)}{p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\chi} \\ &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} \left[(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) - (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n)) \right] p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n) d\boldsymbol{\chi} \\ &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} \left[\boldsymbol{\chi}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})) \right] f(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n) d\boldsymbol{\chi} \\ &= (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi})). \end{aligned} \quad (2.136)$$

De plus, les éléments de la matrice $\boldsymbol{\Psi}$ peuvent être donnés par :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Psi}]_{m,n} &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} \frac{1}{\pi |\boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}|} \exp \left((\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)) \right) \times \\ &\exp \left(-(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m)) - (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n)) \right) d\boldsymbol{\chi} \\ &= \frac{\alpha(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\xi}_n)}{\pi |\boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}|} \underbrace{\int_{\mathbb{C}^{NT}} \exp \left(-(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0))^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)) \right) d\boldsymbol{\chi}}_{\pi |\boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}|} \\ &= \alpha(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\xi}_n), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\xi}_n) &= \exp \left(-2\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n)) \right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m)^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_m)^H \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_n) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}_0)) \right). \end{aligned} \quad (2.137)$$

De ce fait $\mathbf{C}_{\text{BMH}}^{(L)}$, $\mathbf{C}_{\text{BHCR}}^{(L)}$, $\mathbf{C}_{\text{BMS}}^{(L)}$ et $\mathbf{C}_{\text{BCRF}}^{(L,P)}$ sont donnés en remplaçant (2.135), (2.136) et (2.137) dans (2.131) et (2.133).

– Expressions analytiques pour le modèle stochastique

Pour le modèle stochastique nous avons $\boldsymbol{\chi} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0))$ où $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0) = \sigma_s^2 \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{a}(\omega_0, \phi_0) \mathbf{a}^H(\omega_0, \phi_0) + \boldsymbol{\Sigma}_{\text{bruit}}$, avec

$$[\mathbf{FIM}]_{i,k} = T \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0)}{\partial [\boldsymbol{\xi}_0]_i} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_0)}{\partial [\boldsymbol{\xi}_0]_k} \right\}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2. \quad (2.138)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \text{KLD}(p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n)||p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi})) &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n) \text{Ln} \frac{p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n)}{p(\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\chi} \\ &= \int_{\mathbb{C}^{NT}} \frac{1}{\pi^{NT} |\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n)|} (\boldsymbol{\chi}^H (\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n)^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})^{-1}) \boldsymbol{\chi}) \exp(-\boldsymbol{\chi}^H \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n)^{-1} \boldsymbol{\chi}) d\boldsymbol{\chi} + \text{Ln} \frac{|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})|}{|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n)|} \\ &= E_{\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n} \{ \boldsymbol{\chi}^H \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\chi} \} + E_{\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n} \{ \boldsymbol{\chi}^H \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n) \boldsymbol{\chi} \} + \text{Ln} \frac{|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})|}{|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n)|}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Comme

$$E_{\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n} \{ \boldsymbol{\chi}^H \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\chi} \} = \sum_{i=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} E_{\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\xi}_n} \left\{ [\boldsymbol{\chi}]_i^* [\boldsymbol{\chi}]_j [\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})^{-1}]_{i,j} \right\} = \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_n) \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})^{-1}) \quad (2.140)$$

et

$$E_{\chi|\xi_n} \{ \chi^H \Sigma(\xi_0)^{-1} \chi \} = NT. \quad (2.141)$$

Alors, en remplaçant (2.140) et (2.141) dans (2.139) nous obtenons :

$$\text{KLD} (p(\chi|\xi_n) || f(\chi|\xi)) = \text{Ln} \frac{|\Sigma|}{|\Sigma(\xi_n)|} + \text{tr} (\Sigma(\xi_n) \Sigma(\xi)^{-1}) + NT. \quad (2.142)$$

De plus, on notera que :

$$[\Psi]_{n,m} = \frac{|\Sigma(\xi_0)|}{\pi^{NT} |\Sigma(\xi_m)| |\Sigma(\xi_n)|} \underbrace{\int_{\mathbb{C}^{NT}} \exp(-\chi^H (\Sigma(\xi_m)^{-1} + \Sigma(\xi_n)^{-1} - \Sigma(\xi_0)^{-1}) \chi) d\chi}_{\pi^{NT} |(\Sigma(\xi_m)^{-1} + \Sigma(\xi_n)^{-1} - \Sigma(\xi_0)^{-1})^{-1}|} \quad (2.143)$$

$$= \frac{|\Sigma(\xi_0)|}{|\Sigma(\xi_m)| |\Sigma(\xi_n)| |\Sigma(\xi_m)^{-1} + \Sigma(\xi_n)^{-1} - \Sigma(\xi_0)^{-1}|} \quad (2.144)$$

De ce fait, en utilisant $\frac{\partial \text{Ln} |\Sigma(\xi)|}{\partial \xi} = \text{tr} \left\{ \Sigma(\xi)^{-1} \frac{\partial \Sigma(\xi)}{\partial \xi} \right\}$ [PP06], $C_{\text{BMH}}^{(L)}$, $C_{\text{BHCR}}^{(L)}$, $C_{\text{BMS}}^{(L)}$ et $C_{\text{BFCR}}^{(L,P)}$ sont données en remplaçant (2.135), (2.136) et (2.137) dans (2.131) et (2.133).

– Analyse numérique

Pour ces simulations, nous avons considéré une antenne composée de $N = 10$ capteurs avec une distance inter-capteurs $d = \frac{\lambda}{2}$. La source, située dans la région de Fresnel, est repérée par les coordonnées suivantes $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$. On supposera également que $\Sigma_{\text{bruit}} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Il est à noter que les EQM empiriques de l'estimateur du MVD représentées dans les Fig. 2.20 et 2.21, ont été obtenues avec 1000 tirages de type Monte-Carlo. L'ensemble des points tests utilisés pour la BMS, la BHCR, la BMH et la BFCR est égal à $L = 2^{14}$ (plus précisément, l'ensemble des points test suivant le paramètre ω est fixé à $L_1 = 2^7$, de même que celui par rapport à ϕ qui est donné par $L_2 = 2^7$). La BFCR se calcule aussi en choisissant un ensemble de points de test fréquentiels. A cet effet, et pour garder une complexité de calcul sensiblement égale à la BMS, la BHCR et la BMH, on a choisi deux points tests fréquentiels parmi les 2^{14} maximisant la BFCR.

Pour le modèle déterministe, les Fig. 2.20 et Fig. 2.21 nous montrent les différentes bornes de l'EQM des deux paramètres d'intérêt ω et ϕ . On constate tout d'abord que l'EQM sur ϕ est inférieure à celle sur ω , ce qui était prévisible vue la plage de variation des deux paramètres. De plus, la BMS, la BHCR, la BMH et la BFCR décrivent bien le décrochement du MV. Cela étant dit, on remarque que la BMH est la plus pertinente (prédiction du décrochement à moins de 4 dB), vient ensuite la BHCR et la BMS (prédiction du décrochement à moins de 7 dB). Enfin, la BFCR nous fournit une prédiction du décrochement avoisinant les 10 dBs. Les mêmes conclusions peuvent être déduites pour le modèle aléatoire (voir les Fig. 2.22 et Fig. 2.23.)

De façon générale on constate que la BFCR demeure moins performante que toutes les bornes présentées dans cette contribution. Ceci est dû au fait que la BFCR "comprime" les contraintes en appliquant la TFD. Cette compression de contraintes est à l'origine de la dégradation de cette borne. Ce point n'a pas été mentionné dans [TT10] où la BFCR apparaît comme une borne plus pertinente par rapport à la BMS, BHCR et la BMH dans le cas particulier de l'analyse spectrale. Cela étant dit, il faut noter que la BFCR a été calculée à partir de 2^9 points tests, or les autres bornes (BMS, BHCR et la BMH) ont été calculées en maximisant seulement 1 point test parmi 2^9 . Ceci explique, pourquoi dans [TT10] la BFCR apparaît comme étant plus précise que les autres bornes contrairement à l'exemple traité ici.

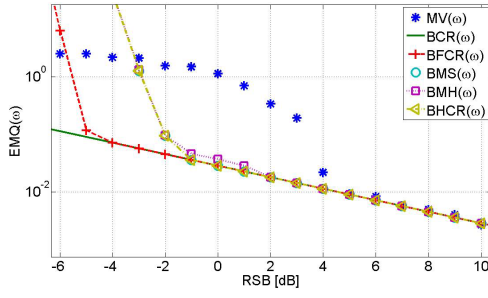


FIGURE 2.20 – Bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne pour le modèle déterministe en fonction de ω pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 15$.

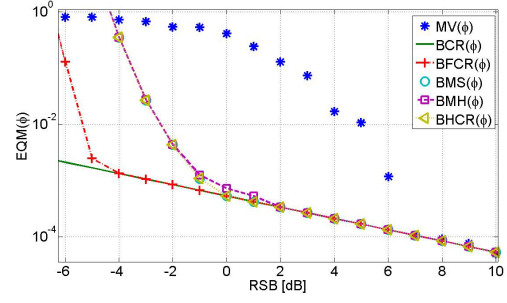


FIGURE 2.21 – Bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne pour le modèle déterministe en fonction de ϕ pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 15$.

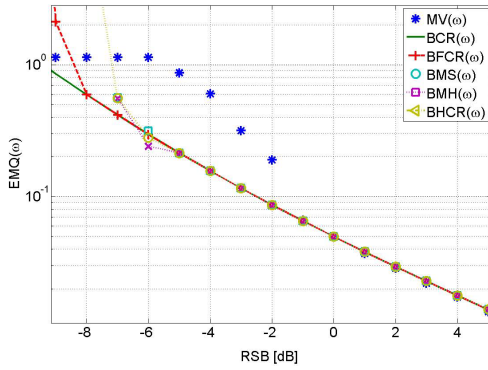


FIGURE 2.22 – Bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne pour le modèle aléatoire en fonction de ω pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 100$.

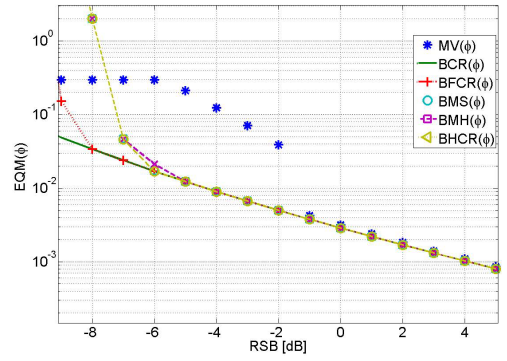


FIGURE 2.23 – Bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne pour le modèle aléatoire en fonction de ϕ pour $(\theta, r) = (30^\circ, 6\lambda)$ et $T = 100$.

2.3.2.2 Estimation de points de ruptures multiples

Avec Patricio La Rosa, Arye Nehorai, Washington University in St. Louis, USA, et Carlos Muravchick, Université de La Plata, Argentine, nous avons calculé une borne inférieure de l’EQM pour un problème d’estimation de points de ruptures. Dans ce contexte, les paramètres sont discret et la classique borne de Cramér-Rao n’est plus applicable. En conséquence, nous nous sommes concentré sur la borne de Barankin qui ne requière pas les mêmes conditions de régularités et est valide pour des paramètres discrets. En particulier, nous avons calculé la forme multivariée de la borne de Chapman–Robbins. Nous avons donné la structure de la matrice d’information de Barankin et montré que le cas particulier de deux points de ruptures est fondamental afin d’inverser la matrice complète. Nous avons proposé plusieurs formes analytiques de cette borne pour l’estimation de points de ruptures dans des séquences de données gaussiennes et poissonniennes. Les détails sont donnés en **annexe E**.

2.3.3 Borne de Weiss-Weinstein

2.3.3.1 Localisation de sources et géométrie d'antenne

Dans le paragraphe 2.3.1.2.3, la BCR était utilisée pour étudier l'impact de la géométrie du réseau sur les performances d'estimation dans le contexte où les paramètres sont supposés déterministes. Afin de compléter cette étude, et toujours dans le cadre de la thèse de Dinh Thang Vu, nous nous sommes intéressés au développement d'un outil pour étudier cet impact dans le contexte Bayésien. La borne de Weiss-Weinstein qui est la borne la plus précise dans la famille des bornes de Weiss-Weinstein a été considérée. La BWW est une borne Bayésienne, donc, elle est utile pour les trois zones d'opération des estimateurs. Elle peut capturer le décrochement de l'EQM obtenue par l'estimateur maximum a posteriori. La BWW a été beaucoup moins étudiée que la BCR du fait de sa complexité. Les détails sont donnés en **annexe I**.

Encore une fois, nous avons étudié les deux modèles des signaux comme dans le chapitre précédent : le modèle stochastique et le modèle déterministe. Dans le contexte du traitement d'antenne, tandis que les expressions analytiques de la borne de Ziv-Zakai (plus précisément son extension proposée par Bell et. al. [BEV96]) ont été proposées il y a environ 15 ans pour le modèle stochastique et les résultats concernant la BWW étaient généralement réalisés par des simulations. Concernant le modèle stochastique, dans [NH88], la BWW a été évaluée par des simulations, et ensuite comparée avec l'EQM obtenue par l'algorithme MUSIC et l'algorithme de formation des voies en utilisant un réseau de capteurs de 8×8 éléments. Dans [NV94], les auteurs ont introduit un comparaison numérique entre la BCR Bayésienne, la borne Ziv-Zakai, et la BWW pour le problème de l'estimation de la DDA. Dans [Ath01], des simulations numériques de la BWW pour optimiser la position des capteurs dans un réseau linéaire non-uniforme ont été proposées. Toujours concernant le modèle stochastique, dans [XBR04], les auteurs ont dérivé des expressions quasi-analytiques d'une version simplifiée de la BWW pour le problème de l'estimation de la DDA dans le contexte du traitement champ adapté. En effet, l'intégration sur la fonction de distribution *a priori* n'a pas été effectuée. Le modèle déterministe avec la séquence des signaux supposée connue, a été étudié seulement dans [Ren07], où les expressions analytiques de la BWW étaient données pour le cas de l'analyse spectrale.

Bien que l'objectif principal était de donner des expressions analytiques de la BWW pour le problème de l'estimation de la DDA d'une seule source en utilisant un réseau de capteurs planaire quelconque, et pour les modèles déterministe et stochastique, nous avons également fourni des expressions quasi-analytiques de la borne qui pourraient être utiles pour d'autres problèmes. Premièrement, nous avons étudié le modèle général des observations Gaussiennes avec moyenne ou matrice de covariance paramétrée. En effet, pour ce modèle, l'un des succès de la BCR est dû à l'expression analytique de la matrice d'information de Fisher qui est appelée la formule de Slepian-Bang [Kay93]. Une telle formule n'avait pas été proposée pour la BWW. Deuxièmement, vu que l'un des objectif de cette partie est de fournir des formules qui pourraient être appliquées dans d'autres domaines, nous avons proposé quelques résultats pour le contexte de sources multiple sans avoir besoin de préciser la structure de la matrice directionnelle et de la matrice de covariance du bruit. Plus particulièrement, pour obtenir les expressions analytiques de la BWW, il faut calculer des intégrales sur les observations et sur les paramètres. Dans cette partie, l'intégration sur l'espace des observations a été proposée. Pour la deuxième intégration sur l'espace des paramètres, il a été nécessaire de détailler la structure de la matrice de covariance du bruit et de la matrice directionnelle afin d'obtenir des expressions analytiques. Ensuite, ces résultats ont été appliqués dans le cas particulier d'une seule source avec deux types de la géométrie du réseau : le réseau linéaire non-uniforme (estimer seulement l'angle d'élévation), et le réseau planaire (estimer l'angle azimut et l'angle d'élévation). Grâce à la structure exponentielle

du vecteur directionnel, nous avons obtenu des expressions de la BWW plus compactes. En effet, nous avons trouvé que pour le cas d'une seule source, l'intégration sur les paramètres était obtenue directement. Il faut noter qu'une des particularité de cette contribution par rapport aux publications précédentes concernant la BWW est que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $s = 1/2$. Finalement, quelques simulations ont été présentées. Nous avons utilisé la BWW pour étudier la valeur optimal de l'angle d'ouverture de l'antenne en V mentionné précédemment. Nous avons montré que pour le modèle déterministe, cette valeur est égale à 90° .

Nous nous sommes limité au cas de l'estimation passive d'une DDA pour une source, située en champ lointain et dont le signal est supposé à bande étroite à partir d'un réseau linéaire (non-uniforme) constitué de N capteurs (les différentes généralisations présentées ci-dessus sont détaillées dans l'annexe I). La position des capteurs dans le réseau est caractérisée par rapport à un référentiel par le vecteur $\mathbf{d} = [d_1 \dots d_N]$. La réponse du i^{eme} capteur à l'instant t est un vecteur donné par : $y_i(t) = [\mathbf{a}(\varphi)]_i s(t) + \mathbf{b}_i(t)$, $t = 1, \dots, T$. $s(t)$ est le signal de la source, T est le nombre des observations, et $[\mathbf{a}(\varphi)]_i = \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} d_i \sin \varphi)$ est le i^{eme} élément du vecteur directionnel $\mathbf{a}(\varphi)$ où φ représente l'angle d'élévation. $\mathbf{b}_i(t)$ est un bruit additif supposé complexe, circulaire, gaussien de moyenne nulle et de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$. Concernant le signal source, on considérera les deux modèles suivants :

- \mathcal{M}_1 : Le modèle déterministe ou conditionnel où le signal est supposé connu [OVS93].
- \mathcal{M}_2 : Le modèle stochastique ou non-conditionnel où le signal est supposé aléatoire, complexe, circulaire, gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma_s^2 \mathbf{I}$ connue. Pour ce modèle, le signal est également supposé indépendant du bruit [OVS93].

On considérera plus particulièrement l'estimation de l'angle électrique $\omega = \sin \varphi$. Cette étude de performance se déroulant dans le contexte Bayésien, on supposera que le paramètre ω est aléatoire avec une loi uniforme $\omega \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ *a priori* :

$$p(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq \omega \leq 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (2.145)$$

Donc, le modèle des observations à l'instant t s'écrit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(\omega)s(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2.146)$$

où $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_N(t)]^T$. A partir des hypothèses précédentes, la fonction de vraisemblance de toutes les observations, *i.e.*, du vecteur $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^T(1) \dots \mathbf{y}^T(T)]^T$, pour le modèle \mathcal{M}_1 est donnée par

$$p(\mathbf{y}|\omega) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} e^{\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega)s(t)\|^2\right)}, \quad (2.147)$$

et la fonction de vraisemblance pour le modèle \mathcal{M}_2 est donnée par

$$p(\mathbf{y}|\omega) = \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{R}(\omega)|^T} e^{\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{R}(\omega)^{-1} \mathbf{y}(t)\right)}, \quad (2.148)$$

où $\mathbf{R}(\omega) = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega)\mathbf{a}(\omega)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}$ représente la matrice de covariance pour le modèle \mathcal{M}_2 . La BWW sera dérivée pour le modèle \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .

- Borne de Weiss-Weinstein pour le réseau linéaire

La BWW est obtenue, en général, en cherchant le maximum d'une fonction sur un ensemble de points test et sur un ensemble de paramètres $s \in [0, 1]$. Concernant le paramètre s , on utilise

souvent l'hypothèse³ $s = 1/2$ [VRBM10, XBR04, Ren07]. Ω et Θ représentent respectivement l'espace des observations et l'espace des paramètres, la BWB pour $s = 1/2$ s'écrit [WW88] :

$$\int_{\Theta} \int_{\Omega} (\hat{\omega} - \omega)^2 p(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} d\omega \geq WWB = \sup_h \frac{h^2 \eta(h, 0) \eta(0, h)}{2(\eta(h, h) - \eta(h, -h))}, \quad (2.149)$$

où $\hat{\omega}$ est un estimateur de ω , où $p(\mathbf{y}, \cdot)$ représente la loi jointe entre le vecteur des observations et le paramètre (ou un point de test), et où h représente la différence entre le paramètre d'intérêt et un point de test appartenant à l'espace des paramètres (c'est-à-dire qu'il faut respecter $\omega + h \in \Theta$). On a défini

$$\eta(\alpha, \beta) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \sqrt{p(\mathbf{y}, \omega + \alpha) p(\mathbf{y}, \omega + \beta)} d\mathbf{y} d\omega = \int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha) p(\omega + \beta)} \zeta(\omega, \alpha, \beta) d\omega \quad (2.150)$$

et $\zeta(\omega, \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \sqrt{p(\mathbf{y} | \omega + \alpha) p(\mathbf{y} | \omega + \beta)} d\mathbf{y}$ où $p(\cdot)$ représente la distribution *a priori* du paramètre. Modèle déterministe \mathcal{M}_1

À partir de l'équation (2.147), l'expression de $\zeta(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$\zeta(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} \times e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \alpha)s(t)\|^2 + \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \beta)s(t)\|^2)\right)} d\mathbf{y}. \quad (2.151)$$

Par le changement de variable

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \frac{1}{2} (\mathbf{a}(\omega + \alpha)s(t) + \mathbf{a}(\omega + \beta)s(t)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left(\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \alpha)s(t)\|^2 + \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \beta)s(t)\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left(\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Puisque

$$\int_{\Omega} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} \exp \left(\sum_{t=1}^T -\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x}(t)\|^2 \right) d\mathbf{x} = 1, \quad (2.153)$$

on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \exp \left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \right). \quad (2.154)$$

Grâce à la structure du vecteur $\mathbf{a}(\omega)$, et sachant que les expressions analytiques de $\|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2$ sont données par

$$\|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 = \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 = N, \quad (2.155)$$

$$\mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta) = \sum_{i=1}^N e^{(j\frac{2\pi}{\lambda} d_k(\beta - \alpha))}, \quad (2.156)$$

3. Voir **annexe I** pour les résultats sans cette hypothèse.

et par

$$\mathbf{a}(\omega + \beta)^H \mathbf{a}(\omega + \alpha) = \sum_{i=1}^N e^{j \frac{2\pi}{\lambda} d_k(\alpha - \beta)}. \quad (2.157)$$

On trouve que les fonctions $\zeta(\alpha, \beta)$ ne dépendent plus du paramètre ω . Par conséquent, $\eta(\alpha, \beta)$ est donné par

$$\eta(\alpha, \beta) = \zeta(\alpha, \beta) \int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha)p(\omega + \beta)} d\omega. \quad (2.158)$$

Sous l'hypothèse d'une distribution *a priori* uniforme, on obtient

$$\int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha)p(\omega + \beta)} = 1 - \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}. \quad (2.159)$$

À partir de (2.149), (2.155), (2.156), (2.157), (2.158) et (2.159), l'expression analytique de la BWW est donnée par (2.160).

$$BWW = \sup_h \frac{h^2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2} \left(N - \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d_k h\right)\right)\right)}{2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right) - 2(1 - |h|) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2\sigma^2} \left(N - \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} d_k h\right)\right)\right)}. \quad (2.160)$$

– Modèle stochastique \mathcal{M}_2

À partir de (2.148), l'expression analytique de $\zeta(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$\zeta(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}} e^{\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \left(\frac{\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}}{2}\right) \mathbf{y}(t)\right)} d\mathbf{y} \quad (2.161)$$

En posant $\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}}{2}$, on obtient, $|\mathbf{\Gamma}| = \frac{2^{2N}}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}|}$, ce qui donne

$$\zeta(\alpha, \beta) = \frac{|\mathbf{\Gamma}|^T}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}} \times \int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{\Gamma}|^T} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}(t)\right) d\mathbf{y}. \quad (2.162)$$

Puisque $\int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{\Gamma}|^T} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}(t)\right) d\mathbf{y} = 1$, on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \frac{|\mathbf{\Gamma}|^T}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}}. \quad (2.163)$$

Grâce à la structure de la matrice $\mathbf{R}(\omega + \delta) = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \delta) \mathbf{a}(\omega + \delta)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}$, on a

$$|\mathbf{R}(\omega + \delta)| = \sigma^{4N} \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \|\mathbf{a}(\omega + \delta)\|^2\right). \quad (2.164)$$

En outre, par l'identité de Woodbury, on obtient

$$\mathbf{R}(\omega + \delta)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\mathbf{I}_{2N} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \delta) \mathbf{a}(\omega + \delta)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \delta)\|^2 + \sigma^2} \right), \quad (2.165)$$

donc,

$$\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left(2\mathbf{I}_{2N} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \alpha) \mathbf{a}(\omega + \alpha)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + \sigma^2} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \beta) \mathbf{a}(\omega + \beta)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + \sigma^2} \right). \quad (2.166)$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}$ est obtenu par une analyse des valeurs propres. En particulier, il y a $2N - 2$ valeurs propres qui sont égales à $2/\sigma^2$, et les vecteurs propres correspondant aux deux dernières valeurs propres forment une combinaison linéaire $\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)$. De plus, ces deux valeurs propres ν sont des solutions de l'équation suivante :

$$(\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}) (\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)) = \nu (\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)), \quad (2.167)$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}(\omega + \alpha) \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(2 - A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 - qAC \right) - \nu \right) \\ & + \mathbf{a}(\omega + \beta) \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(2q - Bq \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 - BC^H \right) - q\nu \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.168)$$

où $A = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + \sigma^2}$, $B = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + \sigma^2}$ et $C = \mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta)$. On obtient l'équation

$$\begin{aligned} & \nu^2 \sigma^4 + \nu \sigma^2 \left(2 - A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 - 2 + B \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \right) \\ & - 4 + 2A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + 2B \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \\ & - AB \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + ABCC^H = 0. \end{aligned} \quad (2.169)$$

En résolvant (2.169) pour ν , et vu que

$$\|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 = \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 = \|\mathbf{a}(\omega)\|^2,$$

on obtient

$$|\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}| = \prod_{i=1}^{2N} \nu_i = \frac{2^{2N}}{\sigma^{4N}} \left(\frac{\sigma^2}{\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s^4 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^4 - \|C\|^2)}{(\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2)^2} \right). \quad (2.170)$$

Finalement, en remplaçant (2.164), (2.170) dans (2.163), on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \left(1 + \frac{\sigma_s^2 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^4 - \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2)}{4\sigma^2 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2)} \right)^{-T}. \quad (2.171)$$

Dans (2.155), (2.156), et (2.157), on trouve que $\zeta(\alpha, \beta)$ ne dépend pas du paramètre ω , comme dans le cas déterministe. Par conséquent, l'expression analytique de la BWV est donnée par (2.172).

$$\begin{aligned} BWV = \sup_h & \frac{h^2 \left(1 - \frac{|h|}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_s^2 \left(N^2 - \left\| \sum_{k=1}^N \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} d_k h) \right\|^2 \right)}{4\sigma^2 (N\sigma_s^2 + \sigma^2)} \right)^{-2T}}{2 \left(1 - \frac{|h|}{2} \right) - 2(1 - |h|) \left(1 + \frac{\sigma_s^2 \left(N^2 - \left\| \sum_{k=1}^N \exp(j \frac{4\pi}{\lambda} d_k h) \right\|^2 \right)}{4\sigma^2 (N\sigma_s^2 + \sigma^2)} \right)^{-T}}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

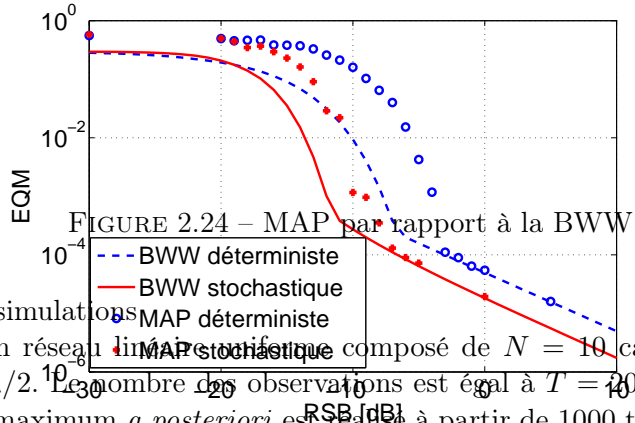


FIGURE 2.24 – MAP par rapport à la BWW.

– Résultats de simulations

On considère un réseau linéaire composé de $N = 10$ capteurs avec une distance entre capteurs de $\lambda/2$. Le nombre des observations est égal à $T = 40$. Enfin, l'EQM empirique de l'estimateur du maximum *a posteriori* est réalisé à partir de 1000 tirages de Monte Carlo. La Fig. 2.24 montre que la BWW donne une bonne approximation du décrochement de l'estimateur du maximum *a posteriori* pour les deux modèles de signaux considérés ici.

2.3.3.2 Estimation de la phase des signaux de pulsar

Une solution potentielle à la navigation spatiale autonome réside dans l'utilisation des signaux de pulsar à rayons X. Le challenge réside en l'estimation précise de la phase du signal du pulsar arrivant sur le détecteur. Les études récentes à ce sujet ont montrées que le phénomène de décrochement apparaît lui aussi pour l'EQM des estimateurs. C'est pourquoi, dans le cadre de la thèse de Nguyen Duy Tran, nous avons proposés plusieurs formes analytiques de bornes inférieures de l'EQM (déterministes et bayésiennes) afin de prédire ce phénomène. Les détails sont donnés en **appendix H**.

Chapitre 3

Conclusions et perspectives

Ma thématique générale de recherche concerne l'estimation et la détection de paramètres (généralement physiques) à partir d'un jeu de données bruitées obtenues à l'aide d'un réseau de capteurs (c'est-à-dire en exploitant à la fois la diversité temporelle et spatiale). En particulier, je me focalise sur les performances ultimes que de tels systèmes peuvent atteindre en utilisant principalement des outils statistiques appelés bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne.

Dans ce contexte, mes recherches s'articulent autour des axes suivants :

- L'étude des performances asymptotiques (en nombre d'observations et/ou en Rapport Signal sur Bruit(RSB)) de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le traitement d'antenne. Le traitement d'antenne concerne l'estimation des directions d'arrivées (localisation) de signaux multiples à l'aide d'un réseau de capteurs. (i) Dans le cadre du maximum de vraisemblance stochastique, c'est-à-dire lorsque les signaux sources sont modélisés par un processus aléatoire gaussien, nous avons démontré que l'estimateur pour les directions d'arrivées est non-gaussien et non-efficace (il n'atteint pas la borne de Cramér-Rao stochastique) lorsque le nombre d'observations T est fini et le RSB infini [J2][CI1][CN1]. Ce résultat est valide quel que soit le nombre de sources et quel que soit la géométrie de l'antenne. Dans le cas d'un scénario à une seule source, nous avons démontré que la loi de l'estimateur est une loi de student à $2T$ degrés de liberté et que la variance de l'estimé était égale à $T/(T - 1)$ fois la borne de Cramér-Rao stochastique. Dans le cas d'un scénario à deux sources nous avons établi une forme analytique de la matrice de covariance des estimés [CI2]. (ii) Lorsque les signaux sources sont supposés déterministes, nous avons établi la gaussianité et l'efficacité asymptotique en RSB de l'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe quel que soit le nombre de sources et quel que soit la géométrie de l'antenne [J1]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Eric Chaumette, ONERA Palaiseau. (iii) Dans le cadre de la thèse de Mohammed Nabil El Korso, commencée en septembre 2008, nous avons calculé et analysé les bornes de Cramér-Rao stochastiques et déterministes dans le contexte de sources situées en champs proche, c'est-à-dire, lorsque les fronts d'ondes ne peuvent plus être considérés comme plans [J9][CI9][CN5].
- Le développement théorique et l'analyse de nouvelles bornes inférieures pouvant prendre en compte des scénarios non standards (c'est-à-dire lorsque la classique borne de Cramér-Rao n'est plus valide). Ces scénarios comprennent des situations où le nombre d'observations est faible et où le rapport signal sur bruit est faible. (i) Nous avons unifié les bornes Bayésiennes de la famille Weiss-Weinstein à l'aide d'un problème d'optimisation sous contraintes [J7][CI3][CN2]. Particulièrement, nous avons établi un pont entre les bornes susmentionnées

et la “meilleure” borne bayésienne : l’erreur quadratique moyenne (EQM) de l’estimateur de la moyenne conditionnelle. Ceci nous a permis d’établir une relation d’ordre entre les différentes bornes souvent inaccessible dans les développements traditionnels exploitant une inégalité de covariance. (ii) Cette unification nous a permis de proposer une nouvelle borne Bayésienne plus précise qu’une large classe d’autres bornes pour une charge de calcul équivalente [CI4]. Ces différents travaux ont été réalisés en collaboration avec Christ Richmond du MIT Lincoln Laboratory (USA) et Arye Nehorai de Washington University in St. Louis (USA). (iii) Nous avons proposé une modification des bornes classiques dans le cas où le processus d’estimation est conditionné à un test de détection ce qui est généralement le cas dans les systèmes radar où la localisation d’une cible est opérée seulement après une phase préalable de détection [CI5]. (iv) Nous nous sommes intéressés à l’obtention de nouvelles bornes inférieures par le biais d’un mélange de contraintes linéaires et non-linéaires. Ces premiers résultats nous ont permis de montrer que toutes les bornes inférieures de l’EQM peuvent être rendues plus précises à l’aide d’une simple transformation de la fonction de vraisemblance [CI8]. Nous avons également proposé une borne conjecturale issue du contexte Bayésien pour analyser les performances non-asymptotiques des estimateurs non-Bayésien [CI13]. Ces deux derniers points ont été réalisés en collaboration avec Eric Chaumette, ONERA Palaiseau. (v) Ces résultats théoriques ont été appliqués pour l’étude non-asymptotique des estimateurs de fréquences porteuses en communications numériques entraînées pour laquelle nous avons proposé une forme simplifiée de la borne d’Abel et de la borne de Weiss-Weinstein [J3][J4].

- L’utilisation de ces bornes inférieures non plus comme benchmark pour connaître les performances possibles pour un estimateur, mais pour le design optimal des systèmes multi-capteurs (en collaboration avec Sylvie Marcos et Rémy Boyer). (i) Dans le cadre de la thèse de Dinh Thang VU, commencée en septembre 2008 (projet DIGITEO), nous avons étudié l’impact de la géométrie d’un réseau de capteurs sur la localisation d’une ou plusieurs sources [J13][CI11][CN4]. Ces travaux ayant commencé dans le domaine asymptotique (en nombre d’observations et/ou en RSB), nous avons poursuivi cette étude dans le domaine non-asymptotique par le biais de l’étude de la borne de Weiss-Weinstein [CI12][CI18](et [J19] soumis). (ii) Dans le cadre de la thèse de Nguyen Duy TRAN, commencée en septembre 2009 (projet DIGITEO), nous travaillons sur le concept de radar MIMO. En particulier, nous avons montré que les performances de l’estimateur du maximum de vraisemblance tendent vers une limite finie en présence d’erreurs de modèle sur la géométrie de l’antenne radar [CI16][CN6] contrairement au cas classique (sans erreurs de modèle) où la précision des estimateurs devient infinie. Dans un cadre non-asymptotique, nous avons proposé une borne inférieure de l’erreur quadratique moyenne globale que nous avons utilisée pour optimiser la géométrie de l’antenne ainsi que celui des formes d’ondes ([J16] soumis).
- L’application des bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne à des problèmes d’estimation non-standard, c’est-à-dire hors cadre asymptotique Gaussien i.i.d., lorsque la classique borne de Cramér-Rao n’existe pas ou encore lorsqu’elle permet d’obtenir d’autres renseignements sur le système étudié (résolution et convergence). (i) Nous avons travaillé sur le thème des bornes minimales récursives pour les communications numériques dans le cadre de modèles non i.i.d. [J6][CI6][CN3]. (ii) L’hypothèse classique d’un bruit Gaussien pour les mesures est erronée dans le contexte radar puisque celui-ci doit faire face à l’environnement situé tout autour de l’objet à détecter. Les radars sont alors perturbés par les échos indésirables des réflecteurs constitutifs du sol, du sur-sol ou encore de la mer. Dans ce contexte, avec Frédéric Pascal du laboratoire SONDRRA (Supelec), nous avons déterminé

les propriétés statistiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance ainsi que la borne de Cramér-Rao pour l'estimation de matrice de covariance lorsque le bruit (appelé clutter dans le contexte radar) suit une distribution de Bessel-K [J8]. (iii) Avec Arye Nehorai, Washington University in St. Louis (USA) et Carlos Muravchik, University of La Plata (Argentine), un travail conjoint a porté sur le thème de la détection de contractions chez la femme enceinte. Le but est, à l'aide d'un réseau de capteurs, de mesurer le signal mécanomyographique et de détecter les différents points de ruptures (contractions) dans ce signal. Le challenge vient ici du fait que la borne de Cramér-Rao ne peut pas être calculée dans ce genre de situation car la fonction de vraisemblance intervenant dans celle-ci n'est pas dérivable. Nous avons donc proposé une étude mettant en jeu la borne de Barankin dont l'obtention ne nécessite pas une telle régularité. Cette étude a été réalisée dans le contexte de données Gaussiennes multivariées avec changement de moyenne et/ou covariance ainsi que dans le cadre de processus Poissonniens [J10][CI7]. (iv) Avec Cédric Herzet, INRIA, nous avons prouvé que la convergence de certains algorithmes d'approximation du maximum de vraisemblance pouvait être calculée à l'aide de différents types de bornes de Cramér-Rao [J5]. (v) Dans le cadre de la thèse de Mohammed Nabil El Korso, nous nous sommes attaqués aux liens entre la borne de Cramér-Rao et les limites de résolutions statistiques des estimateurs. Après avoir appliqué ces concepts aux cas de sources polarisées [J11][CI14], dans un context MIMO [J14][CI15], nous avons étendu de manière théorique la notion de résolution statistique au cas multidimensionnel (plusieurs paramètres d'intérêts par signaux et plusieurs signaux) [CI10][CI19]. Nous avons appliqué cette extension au domaine de la localisation de sources en champ proche [J15] ainsi que pour le modèle multi-harmoniques [J12]. (vi) Enfin, dans le cadre de la thèse de Nguyen Duy Tran, nous avons montré le potentiel des bornes autres que la borne de Cramér-Rao pour des domaines autres que celui du traitement d'antenne. Nous avons commencé à étudier le problème de l'estimation de la phase d'objets astrophysiques appelé Pulsar à rayon X. Un Pulsar est une étoile à neutrons tournant très rapidement sur elle-même. La période de rotation d'un Pulsar présente une stabilité plus forte que les horloges atomiques et pourrait donc s'avérer utile afin d'éviter d'embarquer une horloge atomique dans un satellite. En conséquence, l'estimation de cette période de rotation constitue une piste intéressante dans le domaine des technologies spatiales. Les résultats récents de la littérature (Emadzadeh et Speyer, *IEEE Transactions on Signal Processing* 2010) montrent que le modèle des observations suit un processus Poissonnien paramétré par la période de rotation. Si quelques exemples d'estimateurs (sous-optimaux) sont déjà disponibles, l'étude des performances de tels estimateurs n'a pour le moment pas été entreprise. De plus, des simulations numériques ont clairement montré que ces estimateurs étaient sujet au phénomène de décrochement. En conséquence, nous avons calculé les bornes de Barankin et de Weiss-Weinstein ([J17] soumis) pour ce problème et nous espérons que l'utilisations de ces bornes inférieures donneront des résultats utiles aux astrophysiciens pour quantifier les performances ultimes des tels systèmes.

Depuis mon post-doctorat (2006-2007) et mon recrutement en temps que Maître de Conférence en octobre 2007, mon activité de recherche à principalement consisté à montrer à la communauté scientifique l'utilité des bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne pour le traitement du signal. En particulier, j'ai souhaité accentuer mes recherches vers le fait que ces bornes ne sont pas de simple outils théoriques mais qu'elles peuvent être utiles en pratique dans les systèmes multi-capteurs du futur. Il s'agit de travaux de nature plus appliqués que ceux effectués durant ma thèse que je souhaite terminer (perspectives à court terme) pour me réorienter progressivement vers les outils théoriques (perspectives à long terme). Dans ce contexte, mes

perspectives de recherches sont donc les suivantes :

- *Court terme* : (i) Curieusement, le premier résultat que j’ai obtenu durant ma thèse (ainsi que mon stage de DEA) était un non résultat. En effet, comme dit préalablement, dans le cadre du traitement d’antenne et du maximum de vraisemblance stochastique, c’est-à-dire lorsque les signaux sources sont modélisés par un processus aléatoire gaussien, nous avons démontré que l’estimateur pour les directions d’arrivées est non-gaussien et non-efficace (il n’atteint pas la borne de Cramér-Rao stochastique) lorsque le nombre d’observations T est fini et le RSB infini [J2][CI1][CN1]. Il s’agit d’un non résultat car nous n’avons pas été en mesure de trouver la densité de probabilité de cet estimateur et donc d’en déduire sa matrice de covariance. J’ai récemment découvert que cette loi semble reliée à une loi complexe circulaire Beta multivariée. (ii) Dans le contexte non-Bayésien et Bayésien, de nouvelles bornes ont récemment été proposées dans la littérature (Todros et Tabrikian, *IEEE Transactions on Information Theory* 2010). Nous étudions actuellement ces résultats afin de les replacer dans le cadre unifié d’un problème d’optimisation sous contraintes que nous avons proposé dans [J7][CI3] et [CN2]. Grâce à ce cadre, nous avons montré que ces bornes sont obtenues en appliquant une transformation de Fourier aux contraintes des bornes classiques. Nous cherchons donc à utiliser d’autres transformations unitaires à appliquer aux contraintes afin de diminuer la charge de calcul. De plus, nous cherchons à appliquer ces bornes au problème d’estimation de directions d’arrivées des sources situées en champs proches (un résultat à déjà été publié dans [CN7]). De tels résultats nous permettraient d’étendre le travaux décrit dans [J9] pour l’étude des plages non-asymptotiques des estimateurs. (iii) L’un des point clé du projet Digiteo TIMuCa auquel je participe concerne la sélection de formes d’ondes dans le contexte des radars MIMO. C’est un point que nous avons encore peu abordé dans le cadre de la thèse de Nguyen Duy Tran et que nous allons donc poursuivre. Le but sera de proposer des critères de sélection des formes d’ondes ou de certains de leur paramètres afin d’améliorer les performances d’estimation en termes d’erreur quadratique moyenne de tels systèmes. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur les bornes minimales d’estimation récursives ce qui nous permettra d’obtenir des critères optimaux en terme d’EQM, c’est-à-dire qui conduiront à une meilleure estimation des paramètres physiques de ou des objets présents dans l’environnement (distance, vitesse, position, etc.) pour la localisation, la poursuite et l’identification. Puis nous étudierons des critères optimaux en termes de probabilité de détection et de fausse alarme.
- *Long terme* : (i) L’inégalité de Cramér-Rao et toutes les bornes inférieures de l’erreur quadratique moyenne basées sur une inégalité de covariance en générale ne sont en fait qu’une (petite) partie des travaux de Fisher, Rao, Fréchet, Darrois, Cramér, etc dont la portée était plus générale. Par exemple, dans l’article de Rao de 1945 (Bull. Calcutta Math. Soc.), la moitié de l’article a pour objet la borne de Cramér-Rao et la matrice de Fisher, mais son objectif final concernait la deuxième partie de l’article sur la géométrie de l’information. La matrice d’information de Fisher apparaît dans ce contexte comme la métrique d’une géométrie Riemannienne et nous donne une indication sur la déformation de la variété dans l’espace des paramètres. Il s’agit d’un domaine qui provient à la base des statistiques et des mathématiques en général, mais depuis environ 10 ans, les applications en traitement du signal ont connu une forte croissance. On citera, par exemple, l’analyse de flux audio, la détection radar par moyennage de la matrice de covariance des observations dans l’espace des matrices Hermitiennes, ou encore la vision par ordinateur. Dans ce cadre, la démonstration d’une inégalité de type Cramér-Rao sur une variété arbitraire (qui n’est pas munie d’un ensemble de coordonnées intrinsèques) a été proposée en 2005 (S. Smith, *IEEE Tran-*

sactions on Signal Processing) et utilisée avec succès en traitement d'antenne. L'extension aux autres bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne reste un problème ouvert. Dans le cadre de la géométrie de l'information, un outil fondamental est la métrique de Fisher basée sur l'information de Fisher. La borne de Cramér-Rao est simplement l'inverse de l'information de Fisher. Il paraît donc naturel que les matrices d'informations utilisées pour l'établissement des autres bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne puissent être vues comme une métrique au même titre que la métrique de Fisher. Si nous arrivons à mettre en place ces métriques, un exemple pratique d'application sera encore une fois le traitement d'antenne où une utilisation de la géométrie différentielle pour l'optimisation de la position des réseaux de capteurs a déjà été suggérée dans Manikas, *Differential Geometry in Array Processing*, Imperial College Press, 2004. Il reste cependant beaucoup de zones d'ombre à explorer sur ce sujet. (ii) Avec Patricio La Rosa et Arye Nehorai (Washington university in St. Louis) et Carlos Muravchik (University of La Plata) nous travaillons actuellement sur l'application des bornes Bayésiennes au problème d'estimation de points de ruptures. En effet, dans [J10] et [CI7], nous avons déjà appliqué la borne de Barankin (qui est une borne déterministe) pour ce type de problème, mais cette borne apparaît comme optimiste pour l'application visée (détection de contraction chez la femme enceinte). Nous avons identifié que le problème venait du fait que cette borne s'applique pour des estimateurs non biaisés tandis que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ce problème présente un biais. Afin de lever cette contrainte, il nous a donc semblé judicieux de nous placer dans un contexte Bayésien où les bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne ne nécessitent pas une telle hypothèse. Mais il est intéressant de noter que, pour le moment, nous n'avons travaillé que sur des séquences indépendantes et identiquement distribuées ainsi que lorsque les paramètres des densités de probabilités étaient connus. Il reste donc beaucoup de travaux à réaliser afin d'obtenir des limites inférieures de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs à distance finie (plusieurs résultats sont déjà disponible dans la littérature concernant les performances asymptotiques) par exemple lorsque les processus entre chaque points de ruptures suivent un modèle autorégressif ou GARCH. De plus, les algorithmes actuels dans ce domaine ne se cantonnent pas à la simple estimation des positions des points de ruptures mais aussi à leurs détection (leurs nombre). A ce sujet, je pense que les travaux entrepris avec Eric Chaumette sur les bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne conditionnée à un test de détection [CI5] nous seront alors d'une grande utilité lorsque nous nous attaquerons à ce type de problème.

Bibliographie

- [Abe90] J. S. Abel. A bound on mean square estimate error. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 1345–1348, Albuquerque, NM, USA, April 1990.
- [Abe93] J. S. Abel. A bound on mean square estimate error. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(5) :1675–1680, September 1993.
- [Abe06] H. Abeida. *Imagerie d’antenne pour signaux non circulaires : bornes de performance et algorithmes*. PhD thesis, université Paris 6, France, November 2006.
- [AD08] H. Abeida and J.-P. Delmas. Statistical performance of MUSIC-like algorithms in resolving noncircular sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(6) :4317–4329, September 2008.
- [AGGS96] Y. Abramovich, D.A. Gray, A.Y. Gorokhov, and N.K. Spencer. Comparaison of DOA estimation performance for various types of sparse antenna array geometries. In *EUSIPCO*, pages 1968–1972, Trieste, Italy, September 1996.
- [ASG99] Y. I. Abramovich, N. K. Spencer, and A. Y. Gorokhov. Positive-definite toeplitz completion in DOA estimation for nonuniform linear antenna arrays. II : Partially augmentable arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(6) :1502–1521, June 1999.
- [Ath01] F. Athley. Optimization of element positions for direction finding with sparse arrays. In *Proc. of IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP)*, volume 1, pages 516–519, 2001.
- [Ath05] F. Athley. Threshold region performance of maximum likelihood direction of arrival estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(4) :1359–1373, April 2005.
- [AW08] A. Amar and A.J. Weiss. Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5309–5318, November 2008.
- [Bar49] E. W. Barankin. Locally best unbiased estimates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 20(4) :477–501, December 1949.
- [BC07] A. Barbieri and G. Colavolpe. On the Cramér-Rao bound for carrier frequency estimation in the presence of phase noise. 6(2) :575–582, February 2007.
- [Beh90] R.T. Behrens. *Subspace signal processing in structured noise*. PhD thesis, University of Colorado, Boulder, US-CO, 1990.
- [Bel95] K. L. Bell. *Performance bounds in parameter estimation with application to bearing estimation*. PhD thesis, George Mason University, Fairfax, VA, USA, 1995.
- [BEV96] K. L. Bell, Y. Ephraim, and H. L. Van Trees. Explicit Ziv-Zakai lower bound for bearing estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(11) :2810–2824, November 1996.

- [Bha46] A. Bhattacharyya. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhya Indian J. of Stat.*, 8 :1–14, 201–218, 315–328, 1946.
- [BM03] U. Baysal and R. L. Moses. On the geometry of isotropic arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51 :1469–1477, 2003.
- [BMWZ87] B. Z. Bobrovsky, E. Mayer-Wolf, and M. Zakai. Some classes of global Cramér-Rao bounds. *The Annals of Statistics*, 15(4) :1421–1438, December 1987.
- [Böh84] J. F. Böhme. Estimation of source parameters by maximum likelihood and non linear regression. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 9, pages 271–274, San Diego, CA, USA, March 1984.
- [Böh86] J. F. Böhme. Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields. *ELSEVIER Signal Processing*, 11(4) :329–337, December 1986.
- [Boy08] R. Boyer. Deterministic asymptotic Cramér-Rao bound for the multidimensional harmonic model. *Signal Processing*, 88 :2869–2877, 2008.
- [BS94] R. T. Behrens and L. L. Scharf. Signal processing applications of oblique projection operators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1413–1424, June 1994.
- [BSET97] K. Bell, Y. Steinberg, Y. Ephraim, and H. L. Van Trees. Extended Ziv Zakai lower bound for vector parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43 :624–638, March 1997.
- [BT74] S. Bellini and G. Tartara. Bounds on error in signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Communications*, 22(3) :340–342, March 1974.
- [BT06] I. Bekkerman and J. Tabrikian. Target detection and localization using MIMO radars and sonars. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54 :3873–3883, October 2006.
- [BZ76] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai. A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(1) :45–52, January 1976.
- [Cap69] J. Capon. High resolution frequency wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57(8) :1408–1418, August 1969.
- [CGQL08] E. Chaumette, J. Galy, A. Quinlan, and P. Larzabal. A new Barankin bound approximation for the prediction of the threshold region performance of maximum likelihood estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5319–5333, November 2008.
- [CGV⁺07] E. Chaumette, J. Galy, F. Vincent, A. Renaux, and P. Larzabal. Mse bounds conditioned by the energy detector. In *Proc. of European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, 2007.
- [Cho04] Y. H. Choi. Unified approach to Cramer-Rao bounds in direction estimation with known signal structures. *Signal Processing*, 84(10) :1875 – 1882, 2004.
- [CM97] M. Cedervall and R. L. Moses. Efficient maximum likelihood DOA estimation for signals with known waveforms in presence of multipath. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(3) :808–811, March 1997.
- [Cox73] H. Cox. Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors. *J. Acoust. Soc. Am*, 54(3) :771–785, 1973.

- [CR51] D. G. Chapman and H. Robbins. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(4) :581–586, December 1951.
- [Cra46] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*, volume 9 of *Princeton Mathematics*. Princeton University Press, New-York, September 1946.
- [CZZ75] D. Chazan, M. Zakai, and J. Ziv. Improved lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 21(1) :90–93, January 1975.
- [DA06] J.-P. Delmas and H. Abeida. Statistical resolution limits of DOA for discrete sources. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 4, pages 889–892, Toulouse, France, 2006.
- [Dar45] G. Darmais. Sur les limites de la dispersion de certaines estimations. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 13(1/4) :9–15, 1945.
- [Dil98] E. Dilaveroglu. Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(2) :463–474, February 1998.
- [DMR00] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury. Phase noise in oscillators : a unifying theory and numerical methods for characterization. 47 :655–674, May 2000.
- [Dug37] D. Dugué. Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l'étude des diverses questions d'estimation. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 3(4) :305–372, 1937.
- [EBBM09] M. N. El Korso, G. Bouleux, R. Boyer, and S. Marcos. Sequential estimation of the range and the bearing using the zero-forcing MUSIC approach. In *Proc. EUSIPCO*, pages 1404–1408, Glasgow, Scotland, August 2009.
- [EBRM09] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Nonmatrix closed-form expressions of the Cramér-Rao bounds for near-field localization parameters. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, 2009.
- [EBRM10] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Conditional and unconditional Cramér-Rao bounds for near-field source localization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(5) :2901–2907, May 2010.
- [EBRM11a] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. A GLRT-based framework for the multidimensional statistical resolution limit. In *Proc. of IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, Nice, France, June 2011.
- [EBRM11b] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Statistical resolution limit for source localization in a MIMO context. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Prague, Czech, May 2011.
- [FBLR03] P. Forster, E. Boyer, P. Larzabal, and A. Renaux. Non-efficacité et non-Gaussianité asymptotiques d'un estimateur du maximum de vraisemblance à fort rapport signal sur bruit. In *Proc. du colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, volume 1, pages 125–128, Paris, FR, September 2003.
- [FC09] A. Ferréol and P. Chevalier. High resolution direction finding : from performance toward antenna array optimization -the mono-source case. In *Proc. of European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1973–1977, Glasgow, Scotland, August 2009.

- [FG52] D. A. S. Fraser and I. Guttman. Bhattacharyya bounds without regularity assumptions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(4) :629–632, December 1952.
- [Fis22] R. A. Fisher. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 222 :309–368, 1922.
- [FL02] Ph. Forster and P. Larzabal. On lower bounds for deterministic parameter estimation. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Orlando, FL, 2002.
- [FLV08] A. Ferreol, P. Larzabal, and M. Viberg. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(5) :1945–1953, May 2008.
- [Fre43] M. Frechet. Sur l’extension de certaines évaluations statistiques au cas de petit échantillons. *Revue de l’Institut International de Statistique*, 11(3/4) :182–205, 1943.
- [FT08] T. Filik and T. E. Tuncer. Uniform and nonuniform V-shaped isotropic planar arrays. In *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, pages 99–103, Darmstadt, Germany, July 2008.
- [GAM09] H. Gazzah and K. Abed-Meraim. Optimum ambiguity free directional and omni directional planar antenna arrays for DOA estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(10) :3942–3953, October 2009.
- [GAMH05] E. Grosicki, K. Abed-Meraim, and Y. Hua. A weighted linear prediction method for near-field source localization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53 :3651–3660, 2005.
- [GC81] L. C. Godara and A. Cantoni. Uniqueness and linear independence of steering vectors in array space. 70(2) :467– 475, August 1981.
- [Gla72] F. E. Glave. A new look at the Barankin lower bound. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(3) :349–356, May 1972.
- [GM06] H. Gazzah and S. Marcos. Cramér-Rao bounds for antenna array design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(1) :336–345, January 2006.
- [God97] L.C. Godara. Applications of antenna arrays to mobile communications : II. Beam-forming and direction of arrival considerations. 85(8) :1195–1245, August 1997.
- [GS05] A.B. Gershman and N.D. Sidiropoulos. *Space-time processing for MIMO communications*. Wiley, New York, 2005.
- [GSPL02] A.B. Gershman, P. Stoica, M. Pesavento, and E.G. Larsson. Stochastic Cramér-Rao bound for direction estimation in unknown noise fields. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, 149 :2–8, January 2002.
- [GW91] M. Gavish and A. J. Weiss. Array geometry for ambiguity resolution in direction finding. 44(6) :143– 146, February 1991.
- [Ham50] J. M. Hammersley. On estimating restricted parameters. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 12(2) :192–240, 1950.
- [Hay85] S. Haykin. *Array signal processing*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1985.
- [HB91] Y. D. Huang and M. Barkat. Near-field multiple source localization by passive sensor array. 39 :968–975, 1991.
- [HN98] M. Haardt and J.A. Nossek. Simultaneous schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(1) :161–169, January 1998.

- [HS91] Y. Hua and T. K. Sarkar. A note on the Cramér-Rao bound for 2-D direction finding based on 2-D array. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(5) :1215–1218, May 1991.
- [HSW91] Y. Hua, T. K. Sarkar, and D. D. Weiner. An L-shaped array for estimating 2D directions of wave arrival. 39 :143–146, February 1991.
- [JLL09] M. Jin, G. Liao, and J. Li. Joint DOD and DOA estimation for bistatic MIMO radar. *Elsevier Signal Processing*, 2 :244–251, February 2009.
- [JStB01] T. Jiang, N.D. Sidiropoulos, and J.M.F. ten Berge. Almost-sure identifiability of multidimensional harmonic retrieval. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(9) :1849–1859, September 2001.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, volume 1. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, March 1993.
- [Kay98] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*, volume 2. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, January 1998.
- [KB86] M. Kaveh and A. Barabell. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise. In *Proc. ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, volume 34, pages 331–341, 1986.
- [KBRM11a] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model : Hypothesis test and cramer-rao bound approaches. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, special issue on Advances in Angle-of-Arrival and Multidimensional Signal Processing for Localization and Communications*, (5), May 2011.
- [KBRM11b] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Statistical resolution limit of the uniform linear cogenerated orthogonal loop and dipole array. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(1) :425–431, January 2011.
- [KG09] J. Kusuma and V.K. Goyal. On the accuracy and resolution of powersum-based sampling methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(1) :182–193, January 2009.
- [Kie52] J. Kiefer. On minimum variance estimators. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(4) :627–629, December 1952.
- [KT83] R. Kumaresan and D. W. Tufts. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-19(1) :134–139, January 1983.
- [KV96] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research : the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(4) :67–94, July 1996.
- [LC91] J. Li and R. Compton. Angle and polarization estimation using esprit with a polarizationsensitive array. 39(9) :1376–1383, September 1991.
- [LC03a] J. Lebrun and P. Comon. An algebraic approach to blind identification of communication channels. In *Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications.*, 2003.
- [LC03b] E. L. Lehmann and G. Casella. *Theory of Point Estimation*. Springer Texts in Statistics. Springer, New-York, NY, USA, 2 edition, September 2003.
- [LC93] J. Li and R. T. Compton. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(9) :2850–2862, September 93.

- [Lee92] H. B. Lee. The Cramér-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6) :1507–1517, 1992.
- [Lee94] H. B. Lee. The Cramér-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency (unconditional case). *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1569–1572, 1994.
- [LHSV95] J. Li, B. Halder, P. Stoica, and M. Viberg. Computationally efficient angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(9) :2154–2163, September 1995.
- [LJ92] J. T. H. Lo and S. L. Marple. Jr. Observability conditions for multiple signal direction finding and array sensor localization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(11) :2641–2650, November 1992.
- [LL93] H. B. Lee and F. Li. Quantification of the difference between detection and resolution thresholds for multiple closely spaced emitters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(6) :2274–2277, 1993.
- [LN07] Z. Liu and A. Nehorai. Statistical angular resolution limit for point sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(11) :5521–5527, November 2007.
- [LS09] K. W. K. Lui and H. C. So. A study of two-dimensional sensor placement using time-difference-of-arrival measurements. *Digital Signal Processing*, 19 :650–659, 2009.
- [LSZ96] J. Li, P. Stoica, and D. Zheng. Efficient direction and polarization estimation with a cold array. 44(4) :539–547, April 1996.
- [LV99] A. Leshem and A.-J. Van der Veen. Direction-of-arrival estimation for constant modulus signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(11) :3125–3129, November 1999.
- [LVT89] F. Li, R. J. Vaccaro, and D. W. Tuft. Min-Norm linear prediction for arbitrary sensor arrays. volume 4, pages 2613–2616, Glasgow, UK, May 1989.
- [Man04] A. Manikas. *Differential Geometry in Array Processing*. Imperial College Press, 2004.
- [Mar98] S. Marcos, editor. *Les Méthodes à Haute Résolution : Traitement d’Antenne et Analyse Spectrale*. Hermès, Paris, FR, February 1998.
- [McN94] J. A. McNeill. *Jitter in Ring Oscillators*. PhD thesis, Boston University, 1994.
- [MD01] Y. Meuris and J.P. Delmas. Bounds for sparse planar and volume arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47 :464–468, January 2001.
- [Mes06] H. Messer. The hybrid Cramér-Rao lower bound – from practice to theory. In *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, pages 304–307, Waltham, MA, USA, July 2006.
- [MH71] R. J. McAulay and E. M. Hofstetter. Barankin bounds on parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 17(6) :669–676, November 1971.
- [Mof68] A. Moffet. Minimum-redundancy linear arrays. 16(2) :172–175, June 1968.
- [MS69] R. J. McAulay and L. P. Seidman. A useful form of the Barankin lower bound and its application to PPM threshold analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 15(2) :273–279, March 1969.
- [MS91] A. Mirkin and L. H. Sibul. Cramér-Rao bounds on angle estimation with a two-dimensional array. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39 :515–517, February 1991.

- [MSPM04] K.N. Mokios, N.D. Sidiropoulos, M. Pesavento, and C.F. Mecklenbrauker. On 3-D harmonic retrieval for wireless channel sounding. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 2, pages 89–92, Philadelphia, U.S.A., 2004.
- [NH88] T. J. Nohara and S. Haykin. Application of the Weiss-Weinstein bound to a two dimensional antenna array. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(9) :1533–1534, September 1988.
- [Nie94] R. O. Nielsen. Azimuth and elevation angle estimation with a three dimensional array. 19 :84–86, 1994.
- [NS09] D. Nion and N.D. Sidiropoulos. A PARAFAC-based technique for detection and localization of multiple targets in a MIMO radar system. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, 2009.
- [NS10] D. Nion and D. Sidiropoulos. Tensor algebra and multi-dimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58 :5693–5705, November 2010.
- [NV94] H. Nguyen and H. L. Van Trees. Comparison of performance bounds for DOA estimation. In *Proc. of IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing (SSAP)*, volume 1, pages 313–316, June 1994.
- [OM05] U. Oktel and R. L. Moses. A Bayesian approach to array geometry design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(5) :1919–1923, May 2005.
- [OVSN93] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai. Exact and large sample maximum likelihood techniques for parameter estimation and detection in array processing. In S. S. Haykin, J. Litva, and T. J. Shepherd, editors, *Radar Array Processing*, chapter 4, pages 99–151. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [PG01] M. Pesavento and A.B. Gershman. Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49 :1310–1324, July 2001.
- [PMB04] M. Pesavento, C.F. Mecklenbrauker, and J.F. Bohme. Multidimensional rank reduction estimator for parametric MIMO channel models. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 9 :1354–1363, 2004.
- [PP06] K.B. Petersen and M.S. Pedersen. The matrix cookbook. *Citeseer*, 2006.
- [PRK86] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath. A subspace rotation approach to signal parameter estimation. *Proceedings of the IEEE*, 74(7) :1044–1046, July 1986.
- [RAFL07] A. Renaux, L. N. Atallah, Ph. Forster, and P. Larzabal. A useful form of the Abel bound and its application to estimator threshold prediction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(5) :2365–2369, May 2007.
- [Rao45] C. R. Rao. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 37 :81–91, 1945.
- [RB74] D. C. Rife and R. R. Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete time observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(5) :591–598, September 1974.
- [Ren07] A. Renaux. Weiss-Weinstein bound for data aided carrier estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 14(4) :283–286, April 2007.

- [RFB04] A. Renaux, P. Forster, and E. Boyer. Non asymptotic efficiency of a maximum likelihood estimator at finite number of samples. In *Proc. of European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 2247–2250, Vienna, AT, September 2004.
- [RFBL] A. Renaux, Ph. Forster, E. Boyer, and P. Larzabal. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal to noise ratio. *to appear in IEEE Trans. on Signal Processing*.
- [RFBL04] A. Renaux, P. Forster, E. Boyer, and P. Larzabal. Non efficiency and non Gaussianity of a maximum likelihood estimator at high signal to noise ratio and finite number of samples. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 2, pages 121–124, Montreal, QC, CA, May 2004.
- [RFBL07] A. Renaux, P. Forster, E. Boyer, and P. Larzabal. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal-to-noise ratio. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(5, Part 2) :2358–2364, May 2007.
- [RFCL06] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal. On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(12) :4840–4843, December 2006.
- [RFL05a] A. Renaux, P. Forster, and P. Larzabal. A new derivation of the Bayesian bounds for parameter estimation. In *Proc. of IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP)*, pages 567–572, Bordeaux, FR, July 2005.
- [RFL05b] A. Renaux, P. Forster, and P. Larzabal. Une nouvelle approche des bornes bayésiennes. In *Proc. du colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, volume 1, pages 141–144, Louvain-la-Neuve, BE, September 2005.
- [RFL⁺08] A. Renaux, P. Forster, P. Larzabal, C. D. Richmond, and A. Nehorai. A fresh look at the Bayesian bounds of the Weiss-Weinstein family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5334–5352, November 2008.
- [RFLR06] A. Renaux, Ph. Forster, P. Larzabal, and C.D. Richmond. The Bayesian Abel bound on the mean square error. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Toulouse, FR, May 2006.
- [RHG07] F. Roemer, M. Haardt, and G. Del Galdo. Higher order SVD based subspace estimation to improve multi-dimensional parameter estimation algorithms. In *Proc. of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (ASILOMAR)*, 2007.
- [RM95] I. Reuven and H. Messer. The use of the Barankin bound for determining the threshold SNR in estimating the bearing of a source in the presence of another. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 1645–1648, Detroit, MI, USA, May 1995.
- [RM97] I. Reuven and H. Messer. A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector. *IEEE Transactions on Information Theory*, 43(3) :1084–1093, May 1997.
- [RS87a] Y. Rockah and P. Schultheiss. Array shape calibration using sources in unknown locations—Part I : Far-field sources. 35 :286–299, March 1987.
- [RS87b] Y. Rockah and P. Schultheiss. Array shape calibration using sources in unknown locations—Part II : Near-field sources and estimator implementation. 35 :724–735, March 1987.
- [Sch81] R. O. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, USA, November 1981.

- [Sch91] L. L. Scharf. *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation, and Time Series Analysis*. Addison-Wesley, New-York, NY, USA, 1991.
- [SD95] K. Sharman and T. Durrani. Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pages 1501–1504, Florida, USA, 1995.
- [SLG01] P. Stoica, E.G. Larsson, and A.B. Gershman. The stochastic CRB for array processing : a textbook derivation. 8 :148–150, May 2001.
- [SM04] M. Shahram and P. Milanfar. Imaging below the diffraction limit : A statistical analysis. 13(5) :677–689, May 2004.
- [SM05a] M. Shahram and P. Milanfar. On the resolvability of sinusoids with nearby frequencies in the presence of noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(7) :2579–2585, July 2005.
- [SM05b] P. Stoica and R.L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Prentice Hall, NJ, 2005.
- [Smi98] S. T. Smith. Accuracy and resolution bounds for adaptive sensor array processing. In *Proceedings in the ninth IEEE SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pages 37–40, 1998.
- [Smi05] S. T. Smith. Statistical resolution limits and the complexified Cramér-Rao bound. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53 :1597–1609, May 2005.
- [SN89] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood and the Cramér-Rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(5) :720–741, May 1989.
- [SN90a] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood and the Cramér-Rao bound : further results and comparisons. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(12) :2140–2150, December 1990.
- [SN90b] P. Stoica and A. Nehorai. Performances study of conditional and unconditional direction of arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(10) :1783–1795, October 1990.
- [SSL68] D. Sengupta, T. Smith, and R. Larson. Radiation characteristics of a spherical array of circularly polarized elements. 16(1) :2– 7, January 1968.
- [SSS95] P. Stoica, V. Simonyte, and T. Soderstrom. On the resolution performance of spectral analysis. *Elsevier Signal Processing*, 44 :153–161, January 1995.
- [Ste76] B.D. Steinberg. Principles of aperture and array system design : Including random and adaptive arrays. *New York, Wiley-Interscience*, vol. 1 :p. 374, 1976.
- [STWT06] C. Schneider, U. Trautwein, W. Wornitz, and R.S. Thoma. Performance verification of MIMO concepts using multi-dimensional channel sounding. In *Proc. EUSIPCO*, Florence, Italy, September 2006.
- [TGT96] K. C. Tan, S. S. Goh, and E. C. Tan. A study of the rank-ambiguity issues in direction-of-arrival estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(4) :880–887, April 1996.
- [THL⁺01] R.S. Thoma, D. Hampicke, M. Landmann, G. Sommerkorn, and A. Richter. MIMO measurement for double-directional channel modelling. In *COLLOQUIUM DIGEST-IEE*, pages 1–7, 2001.
- [TK99] J. Tabrikian and J. L. Krolik. Barankin bounds for source localization in an uncertain ocean environment. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(11) :2917–2927, November 1999.

- [TT10] K. Todros and J. Tabrikian. General classes of performance lower bounds for parameter estimation Part I : Non-bayesian bounds for unbiased estimators. 56 :5045–5063, October 2010.
- [Van68] H. L. VanTrees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. Wiley, New York, 1968.
- [Van95] F. Vanpoucke. *Algorithms and Architectures for Adaptive Array Signal Processing*. Ph. D. dissertation, Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1995.
- [Van01] H. L. VanTrees. *Detection, Estimation and Modulation Theory : Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise*, volume 3. Wiley, New York, 2001.
- [Van02] H. L. VanTrees. *Detection, Estimation and Modulation theory : Optimum Array Processing*, volume 4. Wiley, New York, 2002.
- [VEB⁺11] D. T. Vu, M. N. El Korsi, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos. Angular resolution limit for vector sensor arrays : Detection and information theory approaches. In *Proc. of IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, Nice, France, June 2011.
- [VH86] E. Vertatschitsch and S. Haykin. Nonredundant arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 74(1) :217–217, June 1986.
- [VO91] M. Viberg and B. Ottersten. Sensor array processing based on subspace fitting. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(5) :1110–1121, May 1991.
- [VOK91] M. Viberg, B. Ottersten, and T. Kailath. Detection and estimation in sensor arrays processing using Weighted Subspace Fitting. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(11) :2436–2449, November 1991.
- [VRBM10] D. T. Vu, A. Renaux, R. Boyer, and S. Marcos. Closed-form expression of the Weiss-Weinstein bound for 3D source localization : the conditional case. In *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, Kibutz Ma’ale Hahamisha, Israel, October 2010.
- [Wei88] E. Weinstein. Relations between Belini-Tartara, Chazan-Zakai-Ziv, and Wax-Ziv lower bounds. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(2) :342–343, March 1988.
- [WF93] A. J. Weiss and B. Friedlander. Range and bearing estimation using polynomial rooting. 18 :130–137, July 1993.
- [WW85] A. J. Weiss and E. Weinstein. A lower bound on the mean square error in random parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 31(5) :680–682, September 1985.
- [WW88] E. Weinstein and A. J. Weiss. A general class of lower bounds in parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(2) :338–342, March 1988.
- [WZ97] K.T. Wong and M.D. Zoltowski. Uni-vector-sensor ESPRIT for multisource azimuth, elevation, and polarization estimation. 45(10) :1467–1474, October 1997.
- [XBR04] W. Xu, A. B. Baggeroer, and C. D. Richmond. Bayesian bounds for matched-field parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(12) :3293–3305, December 2004.
- [Xu01] W. Xu. *Performances bounds on matched-field methods for source localization and estimation of ocean environmental parameters*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, June 2001.

- [YF98] N. Yuen and B. Friedlander. Performance analysis of higher order ESPRIT for localization of near-field sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46 :709–719, 1998.
- [YS05] B. Yang and J. Scheuing. Cramér-Rao bound and optimum sensor array for source localization from the differences of arrival. In *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 4, pages 961–964, Philadelphia, USA, March 2005.
- [ZC07] W. Zhi and M.Y.W. Chia. Near-field source localization via symmetric subarrays. 14(6) :409–412, 2007.
- [ZZ69] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 15(3) :386–391, May 1969.